UNIV. OF
TORONTO

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemat06liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

530 — 4

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LÉVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME SIXIÈME. — ANNÉE 1890.

46925/99

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1890

(Tous droits réservés.

An
1
J684
ser. 4
c. 6

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur quelques formes quadratiques quaternaires;

PAR LE P. PEPIN S. J.

I.

1. Liouville a énoncé, dans la deuxième série de son Journal, un grand nombre de théorèmes relatifs à la représentation des nombres entiers par diverses sommes de quatre carrés multipliés par des coefficients constants. Quelques-uns de ces théorèmes peuvent se déduire des formules générales utiles dans la théorie des nombres, publiées par le même savant dans le troisième Volume du Journal cité, et dont j'ai donné la démonstration dans le Tome IV de la quatrième série du même Journal (1888). D'autres, au contraire, n'ont été obtenus qu'en recourant à la théorie des fonctions elliptiques. Une partie des formules dont nous ferons usage dans la suite de ce travail ont été données par Liouville lui-même dans le troisième Volume de la

deuxième série de son Journal (1858). On les obtient en faisant $f(x) = \cos xt$ dans les formules (a), (D), (F), (d), que le lecteur trouvera dans le Mémoire cité de 1888 (p. 94, 103, 104). Au moyen de cette substitution, on déduit de la formule (a)

$$(1) \qquad \Sigma(\Sigma \sin at \Sigma \sin bt) = 2^{\lambda-1} \Sigma d \sin^2(2^{\lambda-1} dt);$$

les trois intégrations indiquées dans le premier membre se rapportent aux solutions des trois équations

$$(1') \qquad 2^\lambda m = m' + m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres entiers impairs et positifs, tandis que la somme qui forme le second membre s'étend aux diverses décompositions du nombre impair m en deux facteurs. (Journal cité, p. 198; 1858.)

Au moyen de la même substitution, les formules (D), (F) donnent les deux suivantes (*ibid.*, p. 205, 244) :

$$(2) \qquad 4\Sigma(\Sigma \sin at \Sigma \sin bt) = \zeta_1(m) - \frac{\Sigma \sin dt}{\sin t},$$

$$(3) \qquad 4\Sigma(\Sigma \sin at \Sigma \sin 2^i bt) = \Sigma(\cos dt - \cos \delta t)\delta,$$

où les trois intégrations du premier membre se rapportent aux solutions des trois équations

$$(2') \qquad m = m' + 2^i m'', \qquad m' = a\alpha, \qquad m'' = b\beta$$

en nombres impairs et positifs, l'exposant i pouvant être pair ou impair. La somme Σ du second membre correspond aux diverses décompositions du nombre m en deux facteurs d, δ.

2. Dans la formule (d), on remplace d'abord $f(x, y)$ par $f(x)(-1)^{\frac{y}{2}}$, puis $f(x)$ par $\cos xt$, en ayant égard aux relations

$$(-1)^{\frac{a-b}{2}} = -(-1)^{\frac{a+b}{2}} = (-1)^{\frac{a-1}{2}}(-1)^{\frac{b-1}{2}};$$

on obtient ainsi la formule suivante

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &4\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{a-1}{2}}\cos\alpha t\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos 2^i\beta t\right]\\ &\quad=\Sigma d\cos dt-\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos dt,\end{aligned}\right.$$

dans laquelle les trois intégrations du premier membre se rapportent aux solutions des trois équations (2′), et celles du second membre, à l'équation $m = d\delta$.

La fonction $F(x)$ qui figure dans la formule (L) étant impaire, nous ferons avec Liouville $F(x) = \sin xt$, et nous obtiendrons l'équation

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\left[\Sigma\sin at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt)\right]\\ &\quad=\Sigma\sin(2\,dt)+4\Sigma[\rho(m_2)\Sigma\sin 2\,d_1 t],\end{aligned}\right.$$

dans laquelle les intégrations du premier membre se rapportent aux diverses solutions des équations (1′), la première somme du second membre correspond à l'équation $m = d\delta$, et les deux sommes indiquées dans le dernier terme, aux deux équations

$$(5')\qquad m = m_1 + 2^i m_2,\qquad m_1 = d_1\delta_1.$$

A ces formules, qui appartiennent à Liouville, je joindrai la suivante, tirée de mon Mémoire cité de 1888, p. 126,

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\Sigma\left[\Sigma(-1)^{\frac{\alpha-1}{2}}\cos at\,\Sigma(-1)^{\frac{b-1}{2}}\cos bt\right]\\ &\quad=\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}(1+\cos 2\,dt)\\ &\qquad+4\Sigma\left[\rho(m_2)\Sigma(-1)^{\frac{\delta_1-1}{2}}\cos 2\,d_1 t\right]\\ &\qquad+4\Sigma\left[\rho(m_1)\Sigma(-1)^{\frac{\delta_2-1}{2}}\cos 2^{i+1}\,d_2 t\right].\end{aligned}\right.$$

Les trois intégrations du premier membre se rapportent aux trois équations (1′) : la première somme du second membre correspond à l'équation $m = d\delta$; enfin les autres sommes correspondent aux trois équations

$$m = m_1 + 2^i m_2,\qquad m_1 = d_1\delta_1,\qquad m_2 = d_2\delta_2.$$

5. Nous appliquerons les formules précédentes en faisant successivement $t = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12}$. Mais, pour interpréter les résultats obtenus et pour en déduire les conséquences relatives aux formes quadratiques, il convient d'introduire la fonction numérique définie par la formule

$$\varpi(m, -D) = \sum \left(\frac{D}{\delta}\right),$$

où l'on désigne par D un déterminant négatif, par m un nombre impair, par δ les diviseurs de m et par $\left(\frac{D}{\delta}\right)$ le symbole généralisé de Jacobi, sous la condition d'en réduire la valeur à zéro, lorsque D et δ ne sont pas premiers entre eux. Lorsque $D = -1$, la fonction $\varpi(m, 1)$ coïncide avec celle que Liouville a désignée par $\rho(m)$; elle exprime le nombre des décompositions du nombre $2m$ en deux carrés; son quadruple exprime le nombre des représentations de m par la forme quadratique $x^2 + y^2$. La relation de la fonction $\varpi(m, -D)$ avec les formes quadratiques du déterminant D est déterminée par les deux théorèmes suivants :

I. *Si l'on désigne par* (Ω) *l'ensemble des formes quadratiques choisies pour représenter toutes les classes de formes quadratiques du même ordre (proprement ou improprement) primitif du déterminant* D, *et par* m *un nombre impair premier avec* D, *le nombre des représentations de* m *par les formes* (Ω) *relatives à l'ordre proprement primitif est exprimé par*

$$2\varpi(m, -D)$$

ou par

$$4\varpi(m, 1),$$

suivant que D *est inférieur à* -1 *ou égal à* -1.

II. *Le nombre des représentations de* $2m$ *par les formes* Ω *qui représentent l'ordre improprement primitif du déterminant* D *est exprimé par*

$$2\varpi(m, -D)$$

ou par

$$6\varpi(m, 3),$$

suivant que D *est inférieur ou égal à* -3.

4. Lorsque $D = -3$, l'ordre proprement primitif est représenté par une forme unique $(1, 0, 3)$, et l'ordre improprement primitif, par la forme $(2, 1, 2)$. La formule $2\varpi(m, 3)$ exprime le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 3)$, et cela subsiste dans le cas où m est divisible par 3, pourvu que l'on réduise à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{\delta}\right)$ dans la formule

$$\varpi(m, 3) = \sum\left(\frac{-3}{\delta}\right)$$

lorsque le diviseur δ de m est multiple de 3.

Le nombre des solutions de chacune des équations

$$2^{2\lambda+2}m = x^2 + 3y^2, \qquad 2^{2\lambda+4}m = 2x^2 + 2xy + 2y^2$$

est exprimé par $6\varpi(m, 3)$, sous la même condition de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-3}{\delta}\right)$ quand δ n'est pas premier avec 3.

Lorsque $D = -6$, toutes les formes quadratiques du déterminant D sont distribuées en deux classes représentées par les deux formes

$$x^2 + 6y^2, \qquad 2x^2 + 3y^2.$$

Comme ces deux classes forment deux genres différents, un même nombre ne peut être représenté que par une seule de ces deux classes. Soit $n = 2^\alpha . 3^\beta m$, m désignant un nombre premier avec 6. Le nombre des représentations de n par celle des deux formes $(1, 0, 6)$, $(2, 0, 3)$ qui correspond à son genre est exprimé par $2\varpi(m, 6)$. On peut aussi l'exprimer par $2\varpi(3^\beta m, 6)$, en convenant de réduire à zéro le symbole $\left(\frac{-6}{\delta}\right)$, lorsque le diviseur δ de $3^\beta m$ n'est pas premier avec 6. On a, sous cette condition,

$$\varpi(n, 6) = \varpi(3^\beta m, 6) = \varpi(m, 6).$$

5. Les propositions précédentes, empruntées à la théorie des formes quadratiques, sont exposées avec plus de détails dans mon *Étude sur quelques formules d'Analyse utiles dans la théorie des nombres*, qui a paru dans les *Actes de l'Académie des nouveaux Lyncéens* (session du 19 avril 1885).

J'ajouterai ici une proposition semblable relative au déterminant -12. Toutes les formes quadratiques de ce déterminant sont renfermées dans deux classes représentées par les deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$. Les nombres impairs représentés par la première classe sont tous de la forme $4l+1$, tandis que ceux de la seconde sont tous de la forme $4l+3$. Par conséquent, le nombre des représentations d'un nombre impair m par celle des deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$ qui lui convient est exprimé par

$$2\varpi(m, 12) = 2\varpi(m, 3).$$

La représentation d'un nombre pair $2^\alpha m$ par l'une des deux formes $(1, 0, 12)$, $(4, 0, 3)$ se ramène à celle du nombre $2^{\alpha-2}m$ par la forme $(1, 0, 3)$, ce qui exige que α soit de la forme $2l+2$. Le nombre de ces représentations est égal à $2\varpi(m, 3)$ ou à $6\varpi(m, 3)$, suivant que α est égal ou supérieur à 2.

Le déterminant -12 n'admet pas d'ordre improprement primitif, mais il offre deux ordres dérivés, représentés par les deux formes $(2, 0, 6)$, $(4, 2, 4)$. Les représentations du nombre pair $2^\alpha m$ par l'une de ces deux formes se ramènent à celles du nombre $2^{\alpha-1}m$ par la forme $(1, 0, 3)$ ou par la forme $(2, 1, 2)$, suivant que $(\alpha-1)$ est pair ou impair. Par conséquent, la forme $(2, 0, 6)$ ne représente que des nombres de la forme $2^{2l+1}m$, et le nombre des représentations est égal à $2\varpi(m, 3)$ ou à $6\varpi(m, 3)$, suivant que l est nul ou positif; la forme $(4, 2, 4)$ ne représente que des nombres de la forme $2^{2l+2}m$, et le nombre des représentations est égal à $6\varpi(m, 3)$.

6. L'expression $2\varpi(m, -D)$ peut recevoir diverses interprétations relativement aux formes quadratiques, surtout lorsque D est divisible par un carré; car, si $D = -ds^2$, on a

$$\varpi(m, -D) = \varpi(m, -d).$$

Soit, par exemple, $d = -1$; le nombre des représentations d'un nombre m par l'ensemble des formes (Ω) qui représentent les classes proprement primitives du déterminant $-s^2$ est exprimé par la formule

$$2\varpi(m, s^2) = 2\varpi(m, 1) = 2\rho(m).$$

Soit $s^2 = 4$. Les formes (Ω) se réduisent à une seule, $(1, 0, 4)$. Le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme est égal à $2\rho(m)$. La même expression détermine aussi le nombre des représentations de $2^{2\alpha}m$ par la même forme.

Si $s^2 = 16$, les formes Ω sont au nombre de deux, savoir $(1, 0, 16)$, $(4, 2, 5)$; mais, comme ces deux formes appartiennent à deux genres différents, un même nombre ne peut être représenté que par l'une de ces deux formes. Le nombre des représentations d'un nombre impair m par celle de ces deux formes $(1, 0, 16)$, $(4, 2, 5)$ qui lui convient est égal à $2\rho(m)$.

De même, si $d = -2$, la formule

$$2\varpi(m, 2) = 2\sum\left(\frac{-2}{\delta}\right) = 2\Sigma(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}+\frac{\delta-1}{2}}$$

exprime le nombre des représentations, soit du nombre impair m, soit du produit $2^{2\alpha}m$ par la forme $(1, 0, 2)$. Elle exprime aussi le nombre des représentations de m par celle des deux formes $(1, 0, 8)$, $(3, 2, 4)$ qui lui convient.

7. Lorsque, dans nos formules, on égale t à l'un des arcs $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{12}$, la somme $\Sigma \sin dt$ qui correspond aux diviseurs d de m, ainsi que les sommes semblables relatives aux diviseurs des nombres m', m'', s'exprime au moyen des fonctions numériques

$$\varpi(m, 1) = \rho(m), \quad \varpi(m, 2), \quad \varpi(m, 3) \quad \text{et} \quad \varpi(m, 6).$$

On a d'abord

$$(7) \qquad \begin{cases} \sin\frac{d\pi}{2} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}, \\ \sum \sin\frac{d\pi}{2} = \Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \rho(m). \end{cases}$$

Pour $t = \frac{\pi}{4}$, on a

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),\\ (-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),\\ \sum\sin\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m, 2),\\ \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} &= \frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m, 2). \end{aligned}\right.$$

Pour $t = \frac{\pi}{3}$, on a

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \sin\frac{d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-3}{d}\right),\\ \sin\frac{2^i d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{-3}{d}\right)(-1)^{i-1} \qquad (i > 0),\\ \sum\sin\frac{d\pi}{3} &= \frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m, 3),\\ \sum\sin\frac{2^i d\pi}{3} &= (-1)^{i-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m, 3). \end{aligned}\right.$$

Ces dernières formules sont applicables aux valeurs de m divisibles par 3, sous la condition de réduire à zéro le symbole généralisé de Jacobi $\left(\frac{p}{q}\right)$, lorsque les deux nombres p et q ne sont pas premiers entre eux. Pour les formules où figure $\cos\frac{d\pi}{3}$, il faut distinguer les cas où le nombre m est multiple de 3. On a, en effet,

$$\cos\frac{d\pi}{3} = \frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad -1,$$

suivant que d est premier, ou non, avec 3. Si le nombre m est premier avec 3, on a

$$(10)\quad \Sigma(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3} = \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3} = \tfrac{1}{2}\rho(m), \qquad m = d\delta.$$

Si m est divisible par 3, il faut considérer séparément les diviseurs multiples de 3. Pour cela, posons $m = 3^\beta n$ en désignant par n un nombre impair, premier avec 3. Les diviseurs de m sont d'abord les diviseurs de n que nous désignerons par d_1; puis les produits des diviseurs d_1 multipliés par 3, 3^2, ..., 3^β, de sorte que, en indiquant par Σ_1 une somme qui correspond aux diviseurs d_1 de n, on peut exprimer la somme relative aux diviseurs de m par la formule

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3}$$
$$= \tfrac{1}{2}\Sigma_1(-1)^{\frac{d_1-1}{2}} - \Sigma_1(-1)^{\frac{3d-1}{2}} - \Sigma_1(-1)^{\frac{9d_1-1}{2}} - \ldots - \Sigma_1(-1)^{\frac{3^\beta d_1-1}{2}}.$$

D'ailleurs, on a

$$\frac{3^i d_1 - 1}{2} = \frac{3^i - 1}{2} + \frac{d_1 - 1}{2}, \qquad (-1)^{\frac{3^i-1}{2}} = (-1)^i,$$
$$\Sigma_1(-1)^{\frac{3^i d_1-1}{2}} = (-1)^i \Sigma(-1)^{\frac{d_1-1}{2}} = (-1)^i \rho(n).$$

La formule précédente devient donc

$$\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3} = \rho(n)\left[\tfrac{1}{2} + 1 - 1 + \ldots - (-1)^\beta\right] = \frac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n).$$

D'ailleurs, pour une valeur entière et positive de i, on a toujours

$$\cos\frac{2^i d\pi}{3} = -\cos\frac{d\pi}{3};$$

on aura donc, pour un multiple de 3 de l'une des deux formes $3^\beta n$ ou $2^i.3^\beta n$, les formules suivantes :

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} &\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{d\pi}{3} = \frac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n), \\ &\sum (-1)^{\frac{d-1}{2}} \cos\frac{2^i d\pi}{3} = -\frac{2-(-1)^\beta}{2}\rho(n) \qquad (i > 0). \end{aligned}\right.$$

8. Les formules relatives à l'arc $t = \frac{\pi}{6}$ se déduisent des précédentes au moyen des formules trigonométriques d'addition et des relations

$$\frac{d\pi}{2} - \frac{d\pi}{3} = \frac{d\pi}{6}, \qquad \cos\frac{d\pi}{2} = 0, \qquad \sin\frac{d\pi}{2} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}.$$

On trouve ainsi

$$\sin\frac{d\pi}{6} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{3}, \qquad \cos\frac{d\pi}{6} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\sin\frac{d\pi}{3},$$

$$(12) \qquad \begin{cases} \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{6} = \sum\sin\frac{d\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\varpi(m, 3), \\ \sum\sin\frac{d\pi}{6} = \frac{2-(-1)^{\beta}}{2}\rho(n), \qquad d\delta = m = 3^{\beta}n. \end{cases}$$

Pour l'arc $t = \frac{\pi}{12}$, on emploie les formules

$$\frac{d\pi}{3} - \frac{d\pi}{4} = \frac{d\pi}{12},$$

$$\sin\frac{d\pi}{4} = (-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right),$$

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[\left(\frac{2}{d}\right)\sin\frac{d\pi}{3} - \left(\frac{-2}{d}\right)\cos\frac{d\pi}{3}\right],$$

$$d \equiv \pm 1 \pmod 3.$$

Si $d = 3d_1$, on a

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \sin\frac{d_1\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d_1}\right).$$

En convenant de réduire à zéro le symbole de Jacobi lorsque les deux termes ne sont pas premiers entre eux, on peut réunir les deux formules en une seule, savoir

$$\sin\frac{d\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{-6}{d}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d}\right) - \frac{3\sqrt{2}}{4}\left(\frac{3}{d}\right)^2\left(\frac{-2}{d}\right).$$

On trouve de même

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{-2}{d}\right)+\frac{\sqrt{6}}{4}\left(\frac{-6}{d}\right)\qquad \text{si}\qquad d=3k\pm 1,$$

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12}=-(-1)^{\frac{d_1-1}{2}}\cos\frac{d_1\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{-2}{d_1}\right)\qquad \text{si}\qquad d=3d_1.$$

En intégrant par rapport aux diviseurs d de m et en posant

$$m=3^{\mu}n,\qquad n\equiv\pm 1\pmod 3,$$

on trouve

$$(13)\quad\left\{\begin{aligned}\sum\sin\frac{d\pi}{12}&=\frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m,6)+\frac{\sqrt{2}}{2}\varpi(m,2)-\frac{3\sqrt{2}}{4}\varpi(n,2).\\ \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12}&=\frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m,6)+\frac{\sqrt{2}}{4}\varpi(n,2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\varpi\left(\frac{m}{3},2\right).\end{aligned}\right.$$

Dans la dernière formule, on doit réduire à zéro $\varpi\left(\frac{m}{3},2\right)$ lorsque $\frac{m}{3}$ n'est pas entier. On simplifie ces formules au moyen de la relation

$$\varpi(3^{\mu}n,2)=\varpi(3^{\mu},2)\varpi(n,2)=(\mu+1)\varpi(n,2):$$

on remplace les formules (13) par les suivantes

$$(14)\quad\left\{\begin{aligned}\sum\sin\frac{d\pi}{12}&=\frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m,6)+\frac{\sqrt{2}}{4}(2\mu-1)\varpi(n,2)\qquad(m=3^{\mu}n).\\ \sum(-1)^{\frac{d-1}{2}}\cos\frac{d\pi}{12}&=\frac{\sqrt{6}}{4}\varpi(m,6)-\frac{\sqrt{2}}{4}(2\mu-1)\varpi(n,2).\end{aligned}\right.$$

qui subsistent pour $\mu=0$ et $m=n$.

9. A ces formules trigonométriques nous ajouterons la suivante

$$(15)\qquad \Theta(z)H_1(z)-H_1(z)\Theta'(z)=-H(z)\Theta_1(z).$$

que l'on obtient en prenant la dérivée de la fonction elliptique

$$\cos\operatorname{am}z=\sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{H_1(z)}{\Theta(z)}.$$

Les fonctions H, Θ sont définies par les formules suivantes

$$(A)\quad \begin{cases} \mathrm{H}(z) = \sum (-1)^m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \sin \dfrac{(2m+1)\pi z}{\omega}, \\ \mathrm{H}_1(z) = \sum q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} \cos \dfrac{(2m+1)\pi z}{\omega}, \\ \Theta(z) = \sum (-1)^m q^{m^2} \cos \dfrac{2m\pi z}{\omega}, \\ \Theta_1(z) = \sum q^{m^2} \cos \dfrac{2m\pi z}{\omega}, \end{cases}$$

dans lesquelles le nombre m prend toutes les valeurs entières, de $-\infty$ à $+\infty$. En substituant ces expressions dans la formule (15) et en ayant égard à la formule $\frac{\omega}{\pi} = \overline{\Theta_1(0)}^2 = \theta_1^2$, on obtient la suivante

$$(15')\quad \begin{cases} \sum (-1)^n (2m+1) q^{n^2 + \frac{(2m+1)^2}{4}} \cos \dfrac{2n\pi z}{\omega} \sin \dfrac{(2m+1)\pi z}{\omega} \\ \qquad - \sum (-1)^m m q^{m^2 + \frac{(2n+1)^2}{4}} \sin \dfrac{2m\pi z}{\omega} \cos \dfrac{(2n+1)\pi z}{\omega} \\ \quad = \theta_1^2 \sum (-1)^m q^{n^2 + \frac{(2m+1)^2}{4}} \sin \dfrac{(2m+1)\pi z}{\omega} \cos \dfrac{2n\pi z}{\omega} \qquad (\theta_1^2 = \Sigma q^{x^2+y^2}), \end{cases}$$

dans laquelle les nombres m, n, x, y prennent toutes les valeurs entières de $-\infty$ à $+\infty$.

Soit $z = \frac{\omega}{2}$; le second terme s'annule à cause du facteur

$$\sin \frac{2m\pi z}{\omega} = \sin m\pi = 0.$$

D'ailleurs, on a

$$(-1)^n \cos n\pi = 1, \qquad \sin(2m+1)\frac{\pi}{2} = (-1)^m;$$

notre formule devient donc

$$\Sigma (-1)^m (2m+1) q^{n^2 + \frac{(2m+1)^2}{4}} = \Sigma q^{x^2+y^2} \Sigma (-1)^n q^{n^2 + \frac{(2m+1)^2}{4}}$$

ou bien, par le changement de q en q^4,

$$\Sigma(-1)^m(2m+1)q^{(2m+1)^2+4n^2} = \Sigma(-1)^n q^{(2m+1)^2+4x^2+4y^2+4n^2}.$$

On peut réunir, dans le premier membre, les deux termes qui correspondent à une même valeur de $(2m+1)^2 = i^2$; la valeur positive de m donne $(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ comme coefficient de q^{i^2}; la valeur négative

$$m = -\frac{i+1}{2}$$

donne

$$(-1)^m(2m+1) = -(-1)^{\frac{i+1}{2}} i = (-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Par conséquent, la somme des deux coefficients de q^{i^2} est égale à $2(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$. Désignant donc par i un nombre impair et positif et par x, y, t des nombres entiers, pairs ou impairs, positifs, nuls ou négatifs, on a

$$(15'') \qquad 2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i . q^{i^2+4s^2} = 2\Sigma(-1)^t q^{i^2+4x^2+4y^2+4t^2}.$$

Dans le premier membre, le coefficient de q^m est la somme

$$2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

étendue à toutes les valeurs impaires et positives de i qui vérifient l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle le nombre s est un entier quelconque. Nous obtenons ainsi la fonction numérique employée par Liouville dans plusieurs de ses théorèmes.

II.

10. En faisant successivement $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{3}$, dans la formule (1), on en déduit les suivantes, eu égard aux formules (7), (8)

et (9).

$$(16) \qquad \Sigma \rho(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 0$$

suivant que l'on a $\lambda = 1$ ou $\lambda > 1$;

$$(17) \qquad \Sigma \varpi(m', 2)\varpi(m'', 2) = \zeta_1(m), \qquad 4\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que l'on a $\lambda = 1$, $\lambda = 2$ ou $\lambda > 2$;

$$(18) \qquad \Sigma \varpi(m', 3)\varpi(m'', 3) = 2^{\lambda-1}\Sigma d\left(\frac{3}{d}\right)^2 = 2^{\lambda-1}S(m),$$

$S(m)$ désignant la somme des diviseurs de m, en exceptant ceux qui sont divisibles par 3.

Comme la fonction $\rho(m)$ s'annule lorsque le nombre m est de la forme $4x + 3$, le produit $\rho(m')\rho(m'')$ est constamment nul lorsque, dans l'équation

$$2^\lambda m = m' + m'',$$

l'exposant λ est supérieur à 1, car alors l'un des deux nombres m', m'' est de la forme $4x + 1$, et l'autre de la forme $4x + 3$.

Lorsque $\lambda = 1$, la formule (16) s'interprète de diverses manières. Puisque $\rho(m')$ exprime le nombre des décompositions de $2m'$ en deux carrés impairs à racines positives, le produit $\rho(m')\rho(m'')$ est égal au nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés impairs, dans lesquelles la somme des deux premiers carrés est égale à $2m'$, et la somme des deux derniers à $4m - 2m' = 2m''$. La somme de tous les produits semblables, relatifs à toutes les solutions de l'équation

$$4m = 2m' + 2m'',$$

en nombres impairs et positifs, m', m'', est égale au nombre des décompositions de $4m$ en quatre carrés à racines positives, deux décompositions étant considérées comme différentes, lorsqu'elles sont formées des mêmes carrés et qu'elles ne diffèrent entre elles que par l'ordre de

ces carrés. La formule (16) exprime donc le théorème suivant, de Jacobi :

I. *Le nombre des décompositions du quadruple d'un nombre impair m en quatre carrés impairs, à racines positives, est égal à la somme des diviseurs de m.*

11. La même formule peut encore s'interpréter autrement; $2\rho(m')$ et $2\rho(m'')$ expriment les nombres des représentations de m' et de m'' par la forme $(1, 0, 4)$. Le produit $2\rho(m') \times 2\rho(m'')$ est donc égal au nombre de celles des solutions de l'équation

$$(a) \qquad 2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + 4z^2$ est égale à m'. Le nombre total des solutions de cette équation est donc égal à

$$\Sigma 2\rho(m')\, 2\rho(m'') = 4\zeta_1(m).$$

De même, de ce que $4\rho(m')$ exprime le nombre des représentations de m' par une somme de deux carrés, on conclut que le nombre des représentations de $2m$ par une somme de quatre carrés dont les deux premiers ont pour somme un nombre impair m' est représenté par la somme $\Sigma 4\rho(m')\, 4\rho(m'')$ et qu'ainsi il est égal à $16\zeta_1(m)$. Donc :

II. *Le nombre des représentations de $2m$ par la forme*

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

III. *Le nombre des représentations de $2m$ par la forme*

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

sous la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$, est égal à seize fois la somme des diviseurs de m.

En écrivant la formule (16) de la manière suivante

$$\Sigma 4\rho(m')\,2\rho(m'') = 8\zeta_1(m),$$

on en déduirait d'une manière semblable que :

IV. *Le nombre des représentations du nombre* $2m$ *par la forme*

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m, *sous la condition*

$$x + y \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

Ces théorèmes se ramènent l'un à l'autre par des considérations arithmétiques très simples. Ainsi l'équation

$$(a') \qquad 2m = x^2 + 4y^2 + z^2 + 4t^2$$

admet le même nombre de solutions que l'équation (a). Or l'équation

$$(b) \qquad 2m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

admet deux fois plus de solutions que l'équation (a'), car les deux carrés qui satisfont à l'équation $x^2 + y^2 = m'$ admettent deux permutations dans l'équation (b), tandis que dans l'équation (a') le carré pair est fixé au second terme. Le nombre des solutions de l'équation (b) est donc égal à $8\zeta_1(m)$, sous la condition

$$x + y \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2).$$

12. Dans la formule (17), $2\varpi(m', 2)$ exprime le nombre des représentations de m' par la forme $(1, 0, 2)$; le produit

$$2\varpi(m', 2)\,2\varpi(m'', 2)$$

est donc égal au nombre des solutions de l'équation

$$(c) \qquad 2^2 m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2, \qquad xy \equiv 1 \,(\text{mod. } 2).$$

dans lesquelles la somme $x^2 + 2z^2$ est égale à m'. La somme de tous les produits semblables, relatifs à toutes les valeurs impaires $1, 3, \ldots, (2^\lambda m - 1)$ de m' exprime le nombre de celles des solutions de l'équation (c) dans lesquelles x et y sont impairs. Donc :

V. *Le nombre des solutions de l'équation (c), dans lesquelles les deux premiers carrés sont impairs, est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m, si $\lambda = 1$, et à seize fois cette somme, si $\lambda = 2$. L'équation (c) est impossible lorsque λ est supérieur à 2.*

L'équation (17) peut encore s'interpréter autrement : $2\varpi(m, 2)$ exprime le nombre des représentations de m par la forme $(1, 0, 8)$ ou par la forme $(3, 2, 4)$, suivant que m est de la forme $8x + 1$ ou de la forme $8x + 3$. D'ailleurs l'équation

$$4m = m' + m''$$

exige que l'un des deux nombres m', m'' soit de la forme $4l + 1$ et l'autre de la forme $4l + 3$; de plus, les deux formes $8l + 5$ et $8l + 7$ sont exclues parce que $\varpi(m, 2)$ se réduit à zéro, quand m est de l'une de ces deux formes. Par conséquent, l'un des deux nombres m', m'' sera de la forme $8l + 1$ et l'autre de la forme $8l + 3$; la somme

$$\Sigma 2\varpi(m', 2)\, 2\varpi(m'', 2)$$

exprime le double du nombre des solutions de l'équation

$$(c') \qquad 4m = x^2 + 3y^2 + 4zy + 4z^2 + 8t^2.$$

VI. *Le nombre des représentations du quadruple d'un nombre impair m par la forme quaternaire*

$$x^2 + 3y^2 + 4yz + 4z^2 + 8t^2$$

est égal à huit fois la somme des diviseurs de m.

Dans l'équation $2m = m' + m''$ relativement à la même formule (17), on doit prendre m' et m'' de la forme $8l + 1$, si m est de la

forme $4x+1$, et de la forme $8l+3$, si m est de la forme $4x+3$. Donc :

VII. *Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m par la forme quaternaire*

$$x^2+y^2+8z^2+8t^2$$

ou par la forme

$$3x^2+4xy+4y^2+3z^2+4zt+4t^2,$$

suivant que m est de la forme $4l+1$ ou de la forme $4l+3$, est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

15. En multipliant par 4 l'équation (18), on obtient la formule

$$(18') \qquad \Sigma 2\varpi(m',3)\,2\varpi(m'',3)=2^{\lambda+1}S(m)$$

qui exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(A) \qquad 2^\lambda m=m'+m''=x^2+3y^2+z^2+3t^2$$

dans lesquelles la somme $x+y$ est impaire; car $2\varpi(m',3)$ est égal au nombre des représentations de m' par la forme $(1,0,3)$, de sorte que le produit $2\varpi(m',3)\,2\varpi(m'',3)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation (A) dans lesquelles la somme x^2+3y^2 est égale à m'. La somme de tous les produits semblables, relatifs aux valeurs impaires et positives de m', inférieures à $2^\lambda m$, est donc égale au nombre de celles des solutions de l'équation (A) dans lesquelles les deux premières indéterminées x, y forment une somme impaire. On peut omettre cette restriction lorsque λ est égal à 1, car alors elle est toujours vérifiée, puisque la forme x^2+3y^2 ne peut être un nombre pair sans être un multiple de 4.

On a donc, en désignant par n un nombre premier avec 6 et par β un exposant entier, positif ou nul,

$$N(2.3^\beta n=x^2+y^2+3z^2+3t^2)=4\zeta_1(n)=4S(3^\beta n).$$

VIII. *Le nombre des représentations du double d'un nombre impair m par la forme quaternaire*

$$(\mathrm{A}') \qquad 2m = x^2 + y^2 + 3z^2 + 3t^2$$

est égal à quatre fois la somme de ceux des diviseurs de m qui ne sont pas divisibles par 3.

14. Les deux sommes $x^2 + y^2$, $z^2 + t^2$ sont paires dans l'équation (A'); car, si elles étaient impaires, elles seraient de la forme $4l + 1$ et l'on en déduirait la congruence

$$2m \equiv 1 + 3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod.}\ 4)$$

contrairement à l'hypothèse. On peut donc poser

$$x = p + q, \qquad y = p - q, \qquad z = u + v, \qquad t = u - v,$$

de sorte que l'équation (A') se ramène à la suivante

$$(\mathrm{A}'') \qquad m = 3^\beta n = p^2 + q^2 + 3u^2 + 3v^2,$$

d'où l'on conclut

$$\mathrm{N}(3^\beta n = p^2 + q^2 + 3u^2 + 3v^2) = 4\zeta_1(n) = 4\mathrm{S}(m).$$

IX. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m, en exceptant ceux qui sont multiples de 3.

15. La formule (18') reçoit encore une autre interprétation, lorsque λ est > 1. Dans ce cas, l'un des deux nombres m', m'' est de la forme $4l + 1$, et l'autre de la forme $4l + 3$. En réduisant le second membre à sa moitié, on peut restreindre la somme Σ à celles des solutions de

l'équation

$$2^\lambda m = m' + m''$$

qui vérifient la condition $m' \equiv 1 \pmod{4}$. On a sous cette restriction

$$\Sigma' 2\varpi(m', 3)\, 2\varpi(m'', 3) = 2^\lambda S(m).$$

Or $2\varpi(m', 3)$ et $2\varpi(m'', 3)$ expriment les nombres des représentations de m' et de m'' par les formes respectives $(1, 0, 12)$ et $(3, 0, 4)$. La somme Σ' est donc égale au nombre de celles des solutions de l'équation

$$\text{(B)} \qquad 2^\lambda m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$

dans lesquelles les deux premiers carrés sont impairs. On a

$$N_1(2^\lambda m = x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2) = 2^\lambda S(m) \qquad xy \equiv 1 \pmod{2}.$$

X. *Le nombre des représentations d'un multiple de* 4, $2^\lambda m$, *par la forme*

$$\text{(B)} \qquad x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2,$$

où les deux premiers carrés ne reçoivent que des valeurs impaires, est égal au produit de la somme des diviseurs de ce nombre, impairs et premiers avec 3, *multipliée par* 2^λ, *c'est-à-dire la plus haute puissance de* 2 *renfermée dans ce nombre.*

Nous donnerons plus loin la théorie complète des formes ici considérées; nous nous bornons pour le moment à déduire les conséquences immédiates de nos formules.

16. Posons $t = \frac{\pi}{6}$ dans l'équation (1), puis effectuons à l'aide des formules (12) les intégrations partielles relatives aux diviseurs des nombres m', m''; nous obtenons la formule

$$\Sigma |2 - (-1)^e| \rho(n') |2 - (-1)^f| \rho(n'') = 2^{\lambda+1} \Sigma d \sin^2\left(\frac{2^{\lambda-1} d\pi}{6}\right),$$
$$2^\lambda m = 2^\lambda 3^\beta n = 3^e n' + 3^f n''.$$

Si $\lambda = 1$, on a

$$\sin^2 \frac{d\pi}{6} = \frac{1}{4} \quad \text{ou} \quad = 1$$

suivant que d est premier avec 3 ou divisible par 3. On a donc

$$\begin{aligned}\Sigma\, d \sin^2\left(\frac{d\pi}{6}\right) &= \frac{1}{4}\zeta_1(n) + 3\zeta_1\left(\frac{m}{3}\right)\\ &= \zeta_1(n)\left[\frac{1}{4} + \frac{3^\beta - 1}{2}\,3\right] = \frac{6.3^\beta - 5}{4}\,S(m);\end{aligned}$$

$$(19)\quad \Sigma[2-(-1)^e]\rho(n')[2-(-1)^f]\rho(n'') = (6.3^\beta - 5)S(m),$$
$$3^e n' + 3^f n'' = 2m = 2.3^\beta n, \qquad n n' n'' \equiv \pm 1 \quad (\text{mod. } 3).$$

Si λ est > 1, $\sin^2\left(\frac{2^{\lambda-1} d\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ ou 0 suivant que d est premier avec 3 ou divisible par 3, et l'on a

$$(19')\quad \Sigma[2-(-1)^e]\rho(n')[2-(-1)^f]\rho(n'') = 3.2^{\lambda-1}S(m),$$
$$\lambda > 1, \qquad 2^\lambda m = 3^e n' + 3^f n'' = m' + m''.$$

Pour interpréter ces deux formules, il faut partager la somme Σ en quatre sommes partielles Σ_1, Σ_2, Σ_3, Σ_4 dont les termes correspondent respectivement aux quatre hypothèses suivantes :

$$\left.\begin{array}{ll} 1.\ e \equiv 0, & f \equiv 0,\\ 2.\ e \equiv 0, & f \equiv 1\end{array}\right\}\ (\text{mod. } 2),$$

$$\left.\begin{array}{ll} 3.\ e \equiv 1, & f \equiv 0,\\ 4.\ e \equiv 1, & f \equiv 1\end{array}\right\}\ (\text{mod. } 2).$$

Le premier membre de nos deux équations est alors

$$\begin{aligned}&\Sigma_1\rho(m')\rho(m'') + 3\Sigma_2\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)\\ &+ 3\Sigma_3\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho(m'') + 9\Sigma_4\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right);\end{aligned}$$

mais l'équation (16) nous donne

$$\Sigma_1\rho(m')\rho(m'') = \zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 0,$$

suivant que λ est égal ou supérieur à 1; de plus, à cause de la symétrie de l'équation $m' + m'' = 2^\lambda m$, on a $\Sigma_2 = \Sigma_3$. Les formules (19) et (19') deviennent donc respectivement

$$6\Sigma_2 \rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right) + 9\Sigma_4 \rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right) = (6.3^\beta - 5)S(m) - \zeta_1(m),$$

$$6\Sigma_2 \rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right) + 9\Sigma_4 \rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right) = 3.2^{\lambda-1}S(m), \qquad (\lambda > 1).$$

Or la somme Σ_2 est nulle dans la première équation; car, la somme $m + m''$ étant de la forme $4l + 2$, les deux nombres m', m'' sont tous deux de la forme $4l + 1$ ou tous deux de la forme $4l + 3$, d'où il résulte que les deux nombres m', $\frac{m''}{3}$ sont, l'un de la forme $4l + 1$ et l'autre de la forme $4l + 3$ et qu'ainsi le produit $\rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right)$ est toujours nul. D'ailleurs

$$\zeta_1(m) = \zeta_1(3^\beta n) = \frac{3^{\beta+1} - 1}{2}\zeta_1(n) = \frac{6.3^\beta - 2}{4}S(m).$$

La première équation devient donc

$$\Sigma_4 \rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right) = \frac{3^\beta - 1}{2}S(m).$$

Ce résultat ne fait que confirmer celui que l'on pourrait déduire directement de l'équation (16). L'autre équation au contraire donne un théorème nouveau

$$\Sigma_2 \rho(m')\rho\left(\frac{m''}{3}\right) = 2^{\lambda-2}S(m),$$

car, la somme $m' + m''$ étant divisible par 4, les deux nombres m', m'' sont, l'un de la forme $4l + 1$ et l'autre de la forme $4l + 3$; il en est de même des deux nombres $\frac{m'}{3}$, $\frac{m''}{3}$, et par conséquent le produit

$$\rho\left(\frac{m'}{3}\right)\rho\left(\frac{m''}{3}\right)$$

est constamment nul. Le premier membre de la dernière formule multiplié par 16 exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(A) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

dans lesquelles se trouve vérifiée la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$.

XI. *Le nombre des représentations du produit d'un nombre impair m multiplié par une puissance de 2 supérieure à la première par la forme quaternaire*

$$x^2 + y^2 + 3(z^2 + t^2)$$

et dans lesquelles se trouve vérifiée la condition $x + y \equiv 1 \pmod{2}$ est égal à $2^{\lambda+2}S(m)$, $S(m)$ étant la somme de ceux des diviseurs de m qui sont premiers avec 3.

17. Le théorème que nous venons d'obtenir, joint aux théorèmes VIII et IX, permet d'établir simplement la théorie de la forme (A). Désignons par $N(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre des solutions de l'équation (A), par $N_1(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre de celles qui vérifient la congruence

$$x + y \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

et par $N_2(2^\lambda.3^\beta n)$ le nombre de celles qui satisfont à la condition

$$x + y \equiv 0 \qquad (\text{mod. } 2).$$

On a évidemment la relation

$$N(2^\lambda.3^\beta n) = N_1(2^\lambda.3^\beta n) + N_2(2^\lambda.3^\beta n).$$

Le nombre N_1 est déterminé par le dernier théorème

$$N_1(2^\lambda.3^\beta n) = 2^{\lambda+2}\zeta_1(n).$$

Le nombre N_2 est égal à $N(2^{\lambda-1}.3^\beta n)$, tant que λ est > 0; car alors la somme $x + y$ ne peut pas être paire, sans que $z + t$ le soit égale-

ment; on peut poser

$$x = x_1 + y_1, \qquad y = x_1 - y_1; \qquad z = z_1 + t_1, \qquad t = z_1 - t_1$$

et ramener ainsi les solutions de l'équation (A), qui satisfont à la condition énoncée, à celles de l'équation

$$2^{\lambda-1}.3^\beta n = x_1^2 + y_1^2 + 3(z_1^2 + t_1^2).$$

On a donc, en supposant $\lambda > 1$,

$$\begin{aligned} N(2^\lambda.3^\beta n) \quad - N(2^{\lambda-1}.3^\beta n) &= 2^{\lambda+2}\zeta_1(n), \\ N(2^{\lambda-1}.3^\beta n) - N(2^{\lambda-2}.3^\beta n) &= 2^{\lambda+1}\zeta_1(n). \\ \dots\dots\dots\

18. En faisant $t = 0$ dans l'équation (6), on trouve

$$\Sigma\rho(m')\rho(m'') = \rho(m) + 4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2),$$
$$2m = m' + m'', \qquad m = m_1 + 2^i m_2.$$

Le premier membre est égal à $\zeta_1(m)$ (n° **10**). On a donc

$$(21) \qquad \rho(m) + 4\Sigma\rho(m_1)\rho(m_2) = \zeta_1(m);$$

c'est le résultat que l'on déduirait directement de l'équation (2) en y faisant $t = \frac{\pi}{2}$. Au moyen de la substitution $t = \frac{\pi}{4}$ et des relations (7) et (8), on déduit des équations (2), (3) et (4) les formules suivantes

$$(22) \qquad \varpi(m, 2) + 2\Sigma\varpi(m_1, 2)\varpi(m_2, 2) = \zeta_1(m),$$

$$(23) \qquad 4\Sigma\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) = \Sigma d\left[\left(\frac{2}{\delta}\right) - \left(\frac{2}{d}\right)\right], \qquad d\delta = m,$$

$$4\Sigma(-1)^{\frac{m_1'-1}{2}}\varpi(m_1, 2)\cos\frac{2^i\pi}{4}\rho(m_2) = \left(\frac{2}{m}\right)\Sigma d\left(\frac{2}{\delta}\right) - \Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

Les sommes Σ qui figurent dans les premiers membres de ces équations se rapportent aux solutions de l'équation

$$m = m_1 + 2^i m_2$$

en nombres impairs et positifs; mais, dans l'équation (23), l'exposant i est égal à 1, tandis que dans la dernière cette valeur 1 de i est exclue par le facteur $\cos\frac{2^i\pi}{4}$.

Nous désignerons avec Liouville par $\omega_1(m)$ la fonction définie par la formule

$$\omega_1(m) = \Sigma d\left(\frac{2}{\delta}\right) = \Sigma d(-1)^{\frac{\delta^2-1}{8}}, \qquad d\delta = m.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{\delta-1}{2} \equiv \frac{m-1}{2} + \frac{d-1}{2} \qquad (\text{mod. } 2),$$

$$\Sigma(-1)^{\frac{\delta-1}{2}}\left(\frac{2}{d}\right) = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\varpi(m, 2),$$

$$m_1 \equiv m \quad (\text{mod. } 4), \qquad (-1)^{\frac{m_1-1}{2}} = \left(\frac{-1}{m}\right);$$

par conséquent, la dernière formule multipliée par $\left(\frac{-1}{m}\right)$ devient

$$(24)\qquad \begin{cases} 4\Sigma_2\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) - 4\Sigma_1\varpi(m_1, 2)\rho(m_2) \\ \quad = \left(\frac{-2}{m}\right)\omega_1(m) - \varpi(m, 2), \end{cases}$$

Σ_2 désignant la portion de la somme Σ qui correspond aux valeurs de i égales ou supérieures à 3, et Σ_1 celle qui correspond à la valeur $i = 2$.

19. L'équation (21), multipliée par 4, donne le nombre des solutions de l'équation

$$(C)\qquad m = x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$$

en nombres entiers, pairs ou impairs, positifs, négatifs ou nuls, car $4\rho(m)$ exprime le nombre de celles de ces solutions où les deux nombres z et t sont nuls, tandis que la somme $\Sigma 4\rho(m_1)4\rho(m_2)$ est égale au nombre de toutes les autres solutions. Donc :

XII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$ est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.*

L'équation (21) reçoit encore une autre interprétation quand le nombre m est de la forme $4l + 1$; comme m_1 est aussi de même forme, la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ est toujours divisible par 4. Admettant alors que $4\rho(m_2)$ exprime le nombre des représentations de $2^{i-2}m_2$ par la forme $z^2 + t^2$, le produit $4\rho(m_1)4\rho(m_2)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(D)\qquad m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2,$$

dans lesquelles la somme $x^2 + y^2$ est égale à m_1. La somme de tous les produits semblables, relatifs aux valeurs $1, 5, \ldots, m - 4$ de m_1, augmentée du nombre $4\rho(m)$ des solutions où m_1 est égal à m, est donc le nombre de toutes les solutions de l'équation (D). Donc :

XIII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair*

$m = 4l + 1$ par la forme $x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2$ est égal à quatre fois la somme des diviseurs de m.

Si $m = 4n + 3$, $\rho(m) = 0$. Dans ce cas, $2\rho(m_1)\,2\rho(m_2)$ exprime le nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + 4z^2 + 2(y^2 + 4t^2),$$

dans lesquelles $x^2 + 4z^2$ est égal à m_1. On a donc ce théorème :

XIV. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$(\mathrm{D}') \qquad 4n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$$

est égal à la somme des diviseurs du nombre $4n + 3$.

20. Dans la formule (22), le produit $2\varpi(m_1, 2)\,2\varpi(m_2, 2)$ est égal au nombre de toutes les combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2^{i-1}m_2$ par la même forme; par conséquent, ce produit exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 2(z^2 + 2t^2)$$

dans lesquelles la somme des deux premiers termes est un nombre impair $m_1 < m$. La somme de tous les produits semblables, augmentée du nombre $2\varpi(m, 2)$ des solutions dans lesquelles z et t sont nuls, exprime le nombre de toutes les solutions de l'équation (E). Notre formule exprime donc ce théorème :

XV. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$(\mathrm{E}) \qquad x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

est égal à deux fois la somme des diviseurs de m,

$$\mathrm{N}(m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2) = 2\zeta_1(m).$$

21. L'équation (23) ne peut s'appliquer qu'aux nombres de l'une des deux formes $8l \pm 3$, car ses deux membres s'annulent quand m est de l'une des deux formes $8l \pm 1$; on le constate pour le premier membre en considérant que l'on doit supposer m_2 de la forme $4x + 1$, et m_1 de l'une des deux formes $8l + 1$, $8l + 3$, afin que le produit

$$\varpi(m_1, 2)\rho(m_2)$$

ne soit pas nul; on a donc

$$m = m_1 + 2m_2 \equiv 1 + 2 \quad \text{ou} \quad 3 + 2 \qquad (\text{mod. } 8),$$

ce qui exclut les deux formes $8l \pm 1$. Pour le second membre, on a

$$\left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right) \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{2}{d}\right) = -\left(\frac{2}{\delta}\right),$$

suivant que le nombre m est de l'une des deux formes $8l \pm 1$ ou de l'une des deux formes $8l \pm 3$; car, dans le premier cas, on a

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right) = 1, \qquad \left(\frac{2}{d}\right) = \left(\frac{2}{\delta}\right);$$

dans le second cas, on a

$$\left(\frac{2}{m}\right) = \left(\frac{2}{d}\right)\left(\frac{2}{\delta}\right) = -1, \qquad \left(\frac{2}{d}\right) = -\left(\frac{2}{\delta}\right).$$

L'équation (23) peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$(23') \qquad \Sigma 2\varpi(m_1, 2)4\rho(m_2) = 4\omega_1(m), \qquad m \equiv \pm 3 \qquad (\text{mod. } 8).$$

Cette équation peut s'interpréter de deux manières, suivant que l'on considère $4\rho(m_2)$ comme exprimant le nombre des représentations de m_2 ou de $2m_2$ par la somme de deux carrés. Dans le premier cas, le premier membre est égal au nombre des solutions de l'équation

$$(\mathrm{F}) \qquad 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2t^2, \qquad z + t \equiv 1 \qquad (\text{mod. } 2),$$

car le produit $2\varpi(m_1, 2)4\rho(m_2)$ est égal au nombre de toutes les

combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2m_2$ par la forme $2(z^2 + t^2)$.

Dans le second cas, la somme Σ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{F}') \qquad 8k \pm 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 2t^2$$

où la somme $(y + z)$ est un nombre pair.

22. L'équation (23) peut encore s'écrire

$$\Sigma 2\varpi(m_1, 2)\, 2\rho(m_2) = 2\omega_1(m).$$

Le premier membre exprime alors le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(\mathrm{F}'') \qquad 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

dans lesquelles la valeur de z est impaire, car le produit

$$2\varpi(m_1, 2)\, 2\rho(m_2)$$

exprime le nombre de toutes les combinaisons possibles d'une représentation de m_1 par la forme $(1, 0, 2)$ avec une représentation de $2m_2$ par la forme $(2, 0, 8)$. On a donc

$$\mathrm{N}_1(m = 8k \pm 3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(m),$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z \equiv 1 \pmod{2}$. Si $m = 8n + 5$, cette restriction est toujours vérifiée, car les deux nombres y et z sont alors tous deux impairs. On a donc, sans aucune restriction,

$$\mathrm{N}(8n + 5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(8n + 5).$$

Mais, quand $m = 8k + 3$, l'un des deux nombres y, z est pair et l'autre impair; en assujettissant le nombre z à être impair, on réduit de moitié

le nombre des solutions de l'équation (F″). Le nombre de toutes les solutions est donc égal à $4\omega_1(m)$. Donc :

XVI. *Le nombre des représentations d'un nombre* $8n+3$ *ou* $8n+5$ *par la forme*

$$m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

est égal à quatre fois ou à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m, *dont les conjugués sont de l'une des deux formes* $8l \pm 1$ *sur la somme des autres diviseurs*

$$N(8n+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 4\omega_1(m),$$
$$N(8n+5 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 8t^2) = 2\omega_1(m).$$

25. On interprète d'une manière semblable l'équation (24). Comme, dans la somme Σ_2, la différence $m - m_1$ est divisible par 8, le produit

$$2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2)$$

exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(G) \qquad m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2$$

dans lesquelles la somme $x^2 + 2y^2$ est égale à m_1, et la somme des deux derniers termes, à $2^i m_2$. La somme de tous les produits semblables, augmentée du nombre $2\varpi(m, 2)$ des représentations de m par la forme $(1, 0, 2)$, est donc égale au nombre de toutes les solutions de l'équation (G). On a

$$2\varpi(m, 2) + \Sigma_2 2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2) = N(m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8t^2).$$

Dans Σ_1, au contraire, la différence $m - m_1$ est de la forme $8k+4$, la somme $\Sigma_1 2\varpi(m_1, 2)\,4\rho(m_2)$ exprime le nombre de celles des solutions de l'équation

$$(G') \qquad m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

dans lesquelles la somme $z+t$ est un nombre impair. On a

$$(24')\left\{\begin{aligned} &N(m)=x^2+2y^2+8z^2+8t^2)\\ &\qquad -N_1(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\left(\frac{-2}{m}\right)\omega_1(m),\end{aligned}\right.$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z+t\equiv 1 \pmod{2}$.

Or, dans la forme (G'), le nombre m est de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$ si la somme $z+t$ est paire, et de l'une des deux formes $8l+5$, $8l+7$ dans le cas contraire. Si donc le nombre m est de l'une des deux formes $8l+(1, 3)$, l'équation (G') n'admet aucune solution qui vérifie la condition $z+t\equiv 1 \pmod{2}$, N_1 s'évanouit et l'équation se réduit à la suivante :

$$m=8l+(1, 3), \qquad N(m=x^2+2y^2+8z^2+8t^2)=2\omega_1(m).$$

Dans ce cas, la forme (G') est équivalente à la forme (G); on a

$$N(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\omega_1(m).$$

Si le nombre m est de l'une des deux formes $8l+(5, 7)$, l'équation (G) est impossible, $\left(\frac{-2}{m}\right)$ est égal à -1, et, comme toutes les solutions de l'équation (G') vérifient la condition $z+t\equiv 1 \pmod{2}$, on a sans restriction

$$m=8l+(5, 7), \qquad N(m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2)=2\omega_1(m).$$

En réunissant les deux derniers résultats, nous obtenons ce théorème :

XVII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m par la forme*

$$m=x^2+2y^2+4z^2+4t^2$$

est égal à deux fois l'excès de la somme des diviseurs de m, dont les conjugués sont de l'une des formes $8l\pm 1$ sur la somme des autres diviseurs.

24. La substitution $t = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation (5) conduit à la formule

$$\Sigma\, \varpi(m', 2)\, \varpi(m'', 2) = \rho(m) + 4\Sigma\, \rho(m_1)\, \rho(m_2),$$
$$m' + m'' = 2m, \qquad m = m_1 + 2^i m_2,$$

où sont réunis deux résultats obtenus précédemment. En faisant la même substitution dans l'équation (6) et en effectuant les intégrations partielles relatives aux diviseurs des nombres m', m'', m_2 au moyen des formules (7) et (8), on trouve

$$\Sigma(-1)^{\frac{m-1}{2}}\, \varpi(m', 2)\, \varpi(m'', 2) = \rho(m) + 4\Sigma \cos 2^{i-1}\pi\, \rho(m_1)\, \rho(m_2).$$

Quand m' est de la forme $4l+1$, $2\varpi(m', 2)$ exprime le nombre des représentations de m' par la forme $(1, 0, 8)$; la même expression est égale au nombre des représentations de m' par la forme $(4, 2, 3)$, quand $m' = 4l+3$. Le premier membre de notre formule est donc égal à l'excès du nombre des solutions de l'équation

$$\text{(H)} \qquad 2m = x^2 + 8y^2 + z^2 + 2t^2, \qquad z \equiv 1 \pmod 2$$

sur le nombre des solutions de l'équation

$$\text{(H')} \quad 2m = 4x^2 + 4xy + 3y^2 + z^2 + 2t^2, \qquad z \equiv 1 \pmod 2.$$

Pour le second membre, désignons respectivement par Σ_1, Σ_2 les deux portions de la somme Σ qui correspondent respectivement aux deux hypothèses $i = 1$, $i \geq 2$. Nous aurons

$$4\rho(m) + 16\Sigma_2\, \rho(m_1)\, \rho(m_2) = \quad N(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2),$$
$$16\Sigma_1\, \rho(m_1)\, \rho(m_2) = 2N_1(m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2),$$

en rappelant par l'indice de N_1 la restriction $z \equiv 1 \pmod 2$. L'un de ces nombres est toujours nul, car la première forme ne convient pas à un nombre de la forme $4l+3$, ni la deuxième à un nombre $4l+1$.

On a donc

$$\begin{aligned}
&N_1(8l+2 = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad - N_1(8l+2 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\qquad = N(4l+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2),\\
&N_1(8l+6 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad - N_1(8l+6 = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\qquad = 2N_1(4l+3 = x^2+y^2+2z^2+8t^2).
\end{aligned}$$

D'ailleurs le nombre des solutions, tant de l'équation (H) que de l'équation (H'), est égal au nombre des représentations de $2m$ par la forme

$$x^2+y^2+2z^2+2t^2, \qquad xy \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

lequel est égal à $4\zeta_1(m)$ (n° **12**, th. V). On a donc

$$\begin{aligned}
&N_1(2m = x^2+8y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad + N_1(2m = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2) = 4\zeta_1(m).
\end{aligned}$$

On reconnaît aisément que l'un de ces deux nombres est toujours nul, car les deux équations (H), (H'), réduites en congruences relativement au module 8, deviennent respectivement

$$2m \equiv 2+2t^2, \qquad 2m \equiv 4+2t^2 \qquad (\text{mod } 8):$$

la première ne convient qu'aux nombres $8l+2$ ou $8l+4$, et la seconde aux nombres $8l+4$, $8l+6$. On a donc

$$\begin{aligned}
&N(8l+2 = x^2+y^2+8z^2+8t^2)\\
&\quad = N(4l+1 = x^2+y^2+4z^2+4t^2) = 4\zeta_1(4l+1),\\
&N_1(8l+6 = 4x^2+4xy+3y^2+z^2+2t^2)\\
&\quad = 2N(4l+3 = x^2+y^2+2z^2+8t^2) = 4\zeta_1(4l+3).
\end{aligned}$$

IV.

25. En ajoutant quelques considérations arithmétiques aux théorèmes précédents, on peut compléter la théorie des formes quaternaires auxquelles ils se rapportent. Les formes

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \qquad x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

peuvent représenter des nombres quelconques, pairs ou impairs. On passe de la seconde à la première en posant

$$(A) \qquad 2z = p + q, \qquad 2t = p - q, \qquad 2z^2 + 2t^2 = p^2 + q^2;$$

mais les deux nombres p, q doivent vérifier la congruence

$$p + q \equiv 0 \qquad (\text{mod } 2),$$

tandis que dans la première forme les deux nombres z, t ne sont soumis à aucune condition. Considérons d'abord un nombre impair m. Nous avons trouvé (n° **19**) que le nombre des représentations de m par la deuxième forme est égal à $4\zeta_1(m)$. On en déduit, par la substitution précédente (A), autant de représentations de m par la somme de quatre carrés, savoir toutes celles dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est un nombre pair. Or ce nombre est précisément la moitié du nombre des solutions de l'équation

$$m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

car cette équation admet autant de solutions dans lesquelles la somme des deux derniers carrés est un nombre pair que de solutions dans lesquelles cette somme est un nombre impair; on passe d'un groupe de solutions à l'autre par le seul échange des deux premiers carrés avec les deux derniers. On a donc ce théorème de Jacobi :

XVIII. *Le nombre des représentations d'un nombre impair m*

par la somme de quatre carrés est égal à huit fois la somme des diviseurs de m.

26. Les solutions de l'équation

$$(C) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

se partagent en deux groupes, suivant qu'elles vérifient, oui ou non, la condition $xy \equiv 1 \pmod 2$. Le nombre de celles qui vérifient cette condition est déterminé par le théorème V (n° **12**); en indiquant ce nombre par N_1, on a

$$N_1(2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2) = 4\zeta_1(m), \qquad 16\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad 0,$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 1, \qquad \lambda = 2 \quad \text{ou} \quad \lambda > 2.$$

Les autres solutions se déduisent de celles de l'équation

$$(c) \qquad 2^{\lambda-1} m = z^2 + t^2 + 2u^2 + 2t^2,$$

en prenant $x = 2u$, $y = 2v$. On a donc, en désignant par $N(2^\lambda m)$ le nombre de toutes les solutions de l'équation (C), et par $N_1(2^\lambda m)$ celui des solutions qui vérifient la condition $xy \equiv 1 \pmod 2$,

$$N(2^\lambda m) = N_1(2^\lambda m) + N(2^{\lambda-1} m).$$

En substituant dans cette formule les trois valeurs de $N_1(2^\lambda m)$ déterminées par le théorème cité, on a

$$\begin{aligned} N(2^\lambda m) &= N(2^{\lambda-1} m) = \ldots = N(4m), \qquad \lambda > 2, \\ N(4m) &= 16\zeta_1(m) + N(2m), \\ N(2m) &= 4\zeta_1(m) + N(m). \end{aligned}$$

D'ailleurs, d'après le théorème du n° **19**, on a

$$N(m) = 4\zeta_1(m).$$

On obtient ainsi le théorème suivant, énoncé par Liouville dans le cinquième Volume de la deuxième série de son Journal (p. 269) :

XIX. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(C) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2$$

est exprimé par les formules respectives

$$N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1 \quad \text{ou} \quad \lambda \geqq 2.$$

27. Liouville a déduit ce théorème de celui de Jacobi relatif au nombre des représentations d'un nombre entier par la somme de quatre carrés. Nous suivrons la marche inverse, nous déduirons le théorème de Jacobi de celui que nous venons de démontrer. Tant que l'exposant λ est > 0 dans l'équation (C), la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, de sorte que l'on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2)$$

et ramener les solutions de cette équation à celles de la suivante :

$$2^{\lambda-1} m = p^2 + q^2 + z^2 + t^2.$$

On a donc, pour une valeur positive ou nulle de α,

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = N(2^{\alpha+1} m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2).$$

Or nous venons de trouver que le second membre est égal à $8\zeta_1(m)$ si $\alpha = 0$ et à $24\zeta_1(m)$ si $\alpha > 0$. On a donc

$$N(2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = 8\zeta_1(m) \quad \text{ou} \quad = 24\zeta_1(m),$$

suivant que $2^\alpha m$ est impair ou pair. On obtient ainsi le théorème cité de Jacobi :

XX. *Le nombre des représentations différentes de* n *par une somme de quatre carrés à racines positives, nulles ou négatives, est*

égal à huit fois la somme des diviseurs de n, si n est impair, et à vingt-quatre fois la somme des diviseurs impairs de n, si n est pair.

28. On complète de même la théorie de l'équation

$$(\mathrm{D}) \qquad 2^\lambda m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2.$$

Quand λ est nul, l'équation est impossible si $m = 4l + 3$, et le nombre de ses solutions est égal à $4\zeta_1(m)$ si $m = 4l + 1$ (n° **19**). Quand λ est égal à 1, les deux nombres x, y sont impairs, on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2).$$

et l'équation (D) se ramène à la suivante

$$m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XII (n° **19**). Le nombre des solutions de l'équation (D) est donc égal à $4\zeta_1(m)$ pour la valeur 1 de λ. Lorsque λ est égal ou supérieur à 2, les nombres x, y sont pairs, de sorte que, en posant

$$x = 2u, \qquad y = 2v,$$

on ramène l'équation (D) à la suivante,

$$2^{\lambda-2} m = u^2 + v^2 + z^2 + t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XX.

Le nombre des solutions de l'équation (D) est donc égal à $8\zeta_1(m)$ ou à $24\zeta_1(m)$, suivant que λ est égal à 2 ou > 2. En réunissant ces diverses conclusions, nous obtenons le théorème énoncé par Liouville dans le cinquième volume de la deuxième série de son *Journal* (p. 305) :

XXI. *Si l'on désigne par* N *le nombre des solutions de l'équa-*

tion (D), *on a*

$$N = 0 \quad \text{si} \quad 2^\lambda m = 4l + 3,$$
$$N = 4\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad 2^\lambda m = 4l + 1,$$
$$N = 4\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 1,$$
$$N = 8\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 2,$$
$$N = 24\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ est} > 2.$$

29. Le nombre des solutions de l'équation

$$(E) \qquad 2^\lambda m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4t^2$$

est déterminé par le théorème XV (n° **20**), dans le cas où λ est nul.

Dans les autres cas, on a

$$x = 2u,$$

et l'équation se ramène à la suivante

$$2^{\lambda-1} m = y^2 + z^2 + 2u^2 + 2t^2,$$

dont le nombre des solutions est donné par le théorème XIX (n° **26**); ce nombre est égal à

$$4\zeta_1(m), \quad 8\zeta_1(m), \quad 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on suppose $\lambda - 1 = 0$, $\lambda - 1 = 1$, $\lambda - 1 \geqq 2$.

XXII. *Désignant donc par* N *le nombre des solutions de l'équation* (E), *on a*

$$N = 2\zeta_1(m), \qquad N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on suppose $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda \geqq 3$.

Liouville a étudié l'équation (E) dans le Tome VII de son Journal; il a déterminé le nombre des solutions propres, c'est-à-dire des solutions dans lesquelles les quatre carrés n'ont pas d'autre diviseur commun que l'unité.

Nous la reprendrons plus loin à ce point de vue, ainsi que les équations étudiées précédemment.

30. Le nombre des solutions de l'équation

$$(e) \qquad 2^\lambda m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

se déduit aussi aisément de ce qui précède. Si l'on désigne ce nombre par N, on a évidemment $N = 0$ lorsque λ est nul et que m est de la forme $4l + 3$, ou bien que λ est égal à 1. Si $\lambda \geqq 2$, l'équation se ramène à la suivante

$$2^{\lambda-2} m = x^2 + y^2 + z^2 + t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XX; on a

$$N = 8\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda = 2, \qquad N = 24\zeta_1(m) \quad \text{si} \quad \lambda \text{ est} \geqq 3.$$

Lorsque λ est nul et que $m = 4l + 1$, le nombre des solutions de l'équation (e) se déduit du théorème XIII (n° **19**). Dans l'équation (D) comme dans l'équation (e), l'un des deux premiers carrés est pair et l'autre impair; le carré pair peut occuper deux places dans l'équation (D), tandis qu'il est fixé au second terme dans l'équation

$$(e) \qquad m = x^2 + (2y)^2 + 4z^2 + 4t^2;$$

le nombre des solutions de la première équation est donc double de celui des solutions de la dernière. Donc :

XXIII. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(e) \qquad 2^\lambda m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

est exprimé respectivement par les formules

$$\begin{array}{lll} N = 0 & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 2 \text{ ou } 3 \pmod 4. \\ N = 2\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 1 \pmod 4. \\ N = 8\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 4 \pmod 8. \\ N = 24\zeta_1(m) & \text{si} & 2^\lambda m \equiv 0 \pmod 8. \end{array}$$

31. Les solutions de l'équation (e), dans le cas où $2^\lambda m$ est de la forme $4n+1$, peuvent se partager en deux groupes suivant que y est pair ou impair. La somme des deux nombres de solutions est égale à deux fois la somme des diviseurs de m. D'ailleurs, lorsque y est impair, la forme x^2+4y^2 est équivalente à la forme $(5x^2+4xy+4y^2)$. On a donc

$$\begin{aligned}&N(4n+1=x^2+16y^2+4z^2+4t^2)\\&\quad-N(4n+1=5x^2+4xy+4y^2+4z^2+4t^2)=2\zeta_1(4n+1).\end{aligned}$$

Pour obtenir le théorème de Liouville relativement à la forme

$$x^2+4y^2+4z^2+16t^2,$$

il faut faire intervenir les formules empruntées à la théorie des fonctions elliptiques que nous avons indiquées précédemment (n° **9**). Dans la formule $(15'')$, si l'on égale entre eux les coefficients de q^m dans les deux membres, on a

$$\begin{aligned}&N(m=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)\\&\quad-N(m=5x^2+4xt+4t^2+4y^2+4z^2)=2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,\end{aligned}$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs impaires et positives de i qui satisfont à l'équation

$$m=i^2+4s^2,$$

où l'on désigne par s un entier qui peut être indifféremment positif, nul ou négatif. Il est d'ailleurs évident que le nombre m ne peut être que de la forme $4n+1$. Nous supprimons ici le facteur 2 qui figure dans le second membre de l'équation $(15'')$, parce que nous remplaçons le nombre impair et positif i par le nombre impair x, positif ou négatif. En combinant nos deux formules, nous trouvons

$$N(4n+1=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)=\zeta_1(4n+1)+\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.$$

32. Ce résultat nous donne immédiatement la théorie de l'équation

$$(d)\qquad 2^\lambda m=x^2+4y^2+4z^2+16t^2.$$

Le nombre des solutions de cette équation est nul si $2^\lambda m$ est de l'une des deux formes $4n+2$, $4n+3$; il est exprimé par la dernière formule quand $2^\lambda m$ est de la forme $4n+1$; quand $2^\lambda m$ est un multiple de 4, on a $x = 2u$, et l'équation proposée se ramène à la suivante

$$(d') \qquad 2^{\lambda-2} m = u^2 + y^2 + z^2 + 4t^2,$$

dont le nombre des solutions se détermine aisément au moyen du théorème de Jacobi. Quand $\lambda - 2$ est égal ou supérieur à 2, les trois premiers carrés sont pairs, de sorte qu'en posant

$$u = 2x_1, \qquad y = 2y_1, \qquad z = 2z_1$$

on ramène l'équation à la suivante

$$2^{\lambda-4} m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + u^2;$$

d'après le théorème XX, le nombre des solutions est égal à $8\zeta_1(m)$ ou à $24\zeta_1(m)$ suivant que λ est égal ou supérieur à 4.

Si $\lambda = 3$, deux des trois carrés u^2, y^2, z^2 doivent être impairs, et le troisième, pair. L'équation ne diffère alors de l'équation (6) qu'en ce que, dans celle-ci, le carré pair est fixé au troisième terme, tandis que, dans l'autre, ce carré peut occuper trois places. On a donc

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2) = 3N(2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2).$$

D'après le théorème XXI, le dernier nombre est égal à $4\zeta_1(m)$. Par conséquent, lorsque $\lambda = 3$, le nombre des solutions de l'équation proposée est égal à $12\zeta_1(m)$.

Si $\lambda = 2$, il faut distinguer les deux formes $4n+3$ et $4n+1$. Quand $m = 4n+3$, les trois nombres u, y, z sont impairs; de même, dans la représentation de $4n+3$ par une somme de quatre carrés, un seul carré est pair, et les trois autres sont impairs; mais le carré pair peut occuper quatre places, tandis qu'il est fixé au dernier terme dans l'équation (d'). Le nombre des solutions de cette équation est donc le quart du nombre des représentations de $4n+3$ par une somme de quatre carrés; il est donc égal à $2\zeta_1(4n+3)$.

Quand $m = 4n+1$, un seul des trois nombres u, y, z est impair, et les deux autres, pairs. L'équation (d') ne diffère de l'équation (D)

qu'en ce que, dans cette dernière équation, le carré impair ne peut occuper que deux places, tandis qu'il peut en occuper trois dans la première. On a donc

$$N(m = u^2 + y^2 + z^2 + 4t^2) = \tfrac{3}{2} N(m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2);$$

d'après le théorème XXI, le dernier nombre est égal à $4\zeta_1(m)$; le premier est donc égal à $6\zeta_1(m)$.

En réunissant ces divers résultats, nous obtenons les deux théorèmes suivants :

XXIV. *Le nombre* N *des solutions de l'équation*

$$(d') \qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2$$

est exprimé par les formules respectives

1° $\alpha = 0$, $N(4n+3) = 2\zeta_1(4n+3)$, $N(4n+1) = 6\zeta_1(4n+1)$.

2° $\alpha = 1$, $N(2m) = 12\zeta_1(m)$.

3° $\alpha > 2$, $N(4m) = 8\zeta_1(m)$, $N(2^{\lambda+3}m) = 24\zeta_1(m)$ $(\lambda \geqq 0)$.

Les deux premières formules peuvent se réunir en une seule

$$N(m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

XXV. *Le nombre* $N(2^\alpha m)$ *des solutions de l'équation*

$$(d) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

est nul quand $\alpha = 1$ *et quand,* α *étant nul, le nombre* m *est de la forme* $4n+3$. *Dans les autres cas, ce nombre est exprimé par les formules suivantes*

$$N(4n+1) = \zeta_1(4n+1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

$N[4(4n+3)] = 2\zeta_1(4n+3)$, $N[4(4n+1)] = 6\zeta_1(4n+1)$.

$N(8m) = 12\zeta_1(m)$, $N(16m) = 8\zeta_1(m)$.

$N(2^{\lambda+5}m) = 24\zeta_1(m)$ $(\lambda \geqq 0)$.

La seconde et la troisième formule sont réunies en la suivante :

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m).$$

33. La forme quaternaire

$$(D') \qquad x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2$$

peut représenter tous les nombres entiers. Le nombre $N(2^\alpha m)$ des représentations d'un nombre pair par cette forme est déterminé par le théorème XXII (n° **29**), car ce nombre est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-1}m = y^2 + 2x_1^2 + 2z^2 + 4t^2;$$

il est égal à $2\zeta_1(m)$, $4\zeta_1(m)$, $8\zeta_1(m)$ ou $24\zeta_1(m)$ suivant que α est égal à 1, à 2, à 3 ou qu'il est > 3. Quand α est nul et que $m = 4n + 3$, le nombre $N(4n + 3)$ est exprimé par la formule (n° **19**)

$$N(4n + 3 = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = \zeta_1(4n + 3).$$

Il nous reste à déterminer le nombre $N(m)$ dans le cas où m est de la forme $4n + 1$. Il est évidemment égal à celui des solutions de l'équation

$$(c) \qquad 4n + 1 = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

où le nombre y est pair ou impair en même temps que n. Or l'équation

$$8l + 1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

est équivalente à la suivante

$$(d) \qquad 8l + 1 = x^2 + 4p^2 + 4q^2 + 16t^2;$$

car la congruence relative au module 8 exige que l'on ait

$$p + q \equiv 0 \pmod 2,$$

de sorte que l'on peut poser

$$p = x + y, \qquad q = x - y. \qquad p^2 + q^2 = 2(x^2 + y^2).$$

De plus, nous avons trouvé que le nombre des solutions de la dernière équation est exprimé par la formule (n° **51**)

$$N(8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2) = \zeta_1(8l + 1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

Cette formule exprime donc aussi le nombre des solutions de l'équation (δ) dans le cas où le nombre n est pair.

54. Quand n est impair, le nombre

$$x^2 + 4y^2 = m_1$$

est de la forme $8k + 5$, et le nombre de ses représentations par les deux formes $(1, 0, 4)$, $(4, 2, 5)$ est le même, il est égal à $2\rho(m_1)$. De même, la différence $m - m_1 = 2^i m_2$ étant multiple de 8, le nombre $4\rho(m_2)$ exprime indifféremment le nombre des représentations de $2^i m_2$ par la forme $(4, 0, 4)$ ou par la forme $(8, 0, 8)$. Il résulte de là que le nombre des solutions de l'équation (δ) est le même que celui des solutions de l'équation

$$8k + 5 = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + 4z^2 + 4t^2.$$

Or on déduit des deux formules du n° **51**

$$\begin{aligned} N(8k + 5 = 4x^2 + 4xy + 5y^2 + 4z^2 + 4t^2) \\ = \zeta_1(8k + 5) - \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i. \end{aligned}$$

Le nombre cherché des solutions de l'équation (δ) est donc exprimé par cette même formule. On réunit les trois formules obtenues, dans l'équation suivante

$$N(m = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2) = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

pourvu que l'on convienne de réduire à zéro la somme Σ lorsque l'équation

$$m = i^2 + 4s^2$$

est impossible. De plus, le nombre

$$(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}$$

étant égal à 1 ou à -1, suivant que m est de la forme $8l+1$ ou de la forme $8l+5$, on retrouve les formules démontrées directement pour ces deux cas.

Les résultats obtenus dans ce numéro et dans le précédent nous donnent le théorème énoncé par Liouville dans son Journal (2e série, t. VII, p. 409) :

XXVI. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$(\mathrm{D}') \qquad n = x^2 + 2y^2 + 4z^2 + 8t^2.$$

Pour les valeurs paires de n, on a

$$\mathrm{N} = 2\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 4\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 8\zeta_1(m), \qquad \mathrm{N} = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a

$$n = 2m, \qquad n = 4m, \qquad n = 8m, \qquad \text{ou} \qquad n = 2^\alpha m, \qquad 2^\alpha > 8.$$

Pour les valeurs impaires $n = m$, il faut ajouter la fonction

$$\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

où le signe Σ indique une somme dont les éléments correspondent à toutes les valeurs entières et positives de i qui satisfont à l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

dans laquelle s est un entier, positif, négatif ou nul. On a

$$\mathrm{N} = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$\mathrm{N} = \zeta_1(m) \qquad \text{si} \qquad m = 4l+3.$$

33. Les théorèmes XXIV et XXVI donnent immédiatement le nombre $N(2^\alpha m)$ des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2;$$

car, ainsi que Liouville l'a indiqué lui-même (*Journal de Mathématiques*, 2e série, t. VII, p. 155), si $\alpha = 0$, on a

$$N(m) = 2N(m = x^2 + 4y^2 + 2z^2 + 8t^2),$$

puisque dans la dernière forme on fixe au second terme le carré pair qui, dans l'équation proposée, peut être placé au premier ou au second terme.

Lorsque α est > 0, la somme des deux premiers carrés est un nombre pair, ainsi que leur différence; on peut donc poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2(p^2 + q^2),$$

et ramener l'équation proposée à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = p^2 + q^2 + z^2 + 4t^2$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXIV.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

XXVII. *Le nombre* $N(2^\alpha m)$ *des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 2z^2 + 8t^2$$

est exprimé, suivant les valeurs de α, *par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N(m) = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right];$$
$$m = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0;$$

2° $\alpha = 1, 2$:

$$N(2m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m); \qquad N(4m) = 12\zeta_1(m);$$

3° $\alpha \geqq 3$:

$$N(8m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+4}m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq 0.$$

36. Le nombre des solutions de l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2$$

est double de celui des solutions de l'équation

$$(d) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2.$$

lorsque α est nul. Quand α est positif, la somme $x + y$ est paire, de sorte que l'on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x^2 + y^2 = 2p^2 + 2q^2$$

et ramener l'équation à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = p^2 + q^2 + 2z^2 + 8t^2.$$

dont nous venons de déterminer le nombre des solutions. On déduit donc des deux théorèmes XXV et XXVII le suivant :

XXVIII. *Si l'on désigne par* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

on a, suivant les valeurs de α, *les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N = 0 \quad \text{si} \quad m = 4n + 3, \qquad N = 2\zeta_1(m) + 2\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$m = 4n + 1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0;$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = 2\zeta_1(m) + 2(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i;$$

3° $\alpha = 2, 3$:

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m), \qquad N(8m) = 12\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 4$,

$$N(16m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+5}m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq 3.$$

57. Les deux formes quaternaires

$$x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2, \qquad x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

dont Liouville s'est occupé dans le septième Volume de son Journal (p. 109 et p. 113) ne peuvent représenter que des nombres pairs ou des nombres impairs de la forme $4l + 1$. Un nombre $2^\alpha m$ multiple de 4 est représenté par chacune de ces deux formes un nombre de fois égal à celui des solutions de l'équation

$$2^{\alpha-2}m = x_1^2 + y_1^2 + 2z^2 + 2t^2;$$

ce nombre (XIX, n° **26**) est égal à $4\zeta_1(m)$, $8\zeta_1(m)$, $24\zeta_1(m)$ suivant que α est égal à 2, 3 ou qu'il est > 3.

Si $\alpha = 1$, le nombre $2m$ ne peut pas être représenté par la deuxième forme; il est représenté par la première un nombre de fois égal à celui des solutions de l'équation

$$m = p^2 + q^2 + 4z^2 + 4t^2;$$

ce nombre est égal à 0 ou à $4\zeta_1(m)$ suivant que m est de la forme $4n + 3$ ou de la forme $4n + 1$.

Quand $2^\alpha m = 4n + 1$, le nombre des représentations par la première forme est double de celui des représentations par la deuxième, car dans celle-ci le terme impair est le premier, tandis que dans la première il peut être pris indifféremment pour premier ou pour second terme. Il nous suffit donc de déterminer le nombre des solutions de l'équation

$$(\delta) \qquad 4n + 1 = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

D'après les résultats obtenus plus haut (n^{os} **33**, **34**), le nombre est exprimé par la formule

$$N = \zeta_1(4n+1) + (-1)^n \Sigma (-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$4n+1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

XXIX. *Si nous désignons respectivement par* $N(2^\alpha m)$ *et par* $\mathfrak{N}(2^\alpha m)$ *les nombres des solutions des deux équations*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + 8z^2 + 8t^2, \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 8z^2 + 8t^2,$$

ces nombres sont déterminés par les formules suivantes :

1° $\alpha = 0$:

$$N(4n+3) = \mathfrak{N}(4n+3) = 0,$$

$$N(4n+1) = 2\mathfrak{N}(4n+1) = 2\left[\zeta_1(4n+1) + (-1)^n \Sigma (-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right];$$

2° $\alpha = 1$:

$$\mathfrak{N}(2m) = 0, \qquad N(8n+6) = 0, \qquad N(8n+2) = 4\zeta_1(4n+1);$$

3° $\alpha \geqq 2$:

$$N(4m) = \mathfrak{N}(4m) = 4\zeta_1(m), \qquad N(8m) = \mathfrak{N}(8m) = 8\zeta_1(m),$$
$$N(2^{\lambda+4} m) = \mathfrak{N}(2^{\lambda+4} m) = 24\zeta_1(m), \qquad (\lambda \geqq 0).$$

38. La forme $x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$ peut représenter tous les nombres, excepté ceux qui sont renfermés dans la formule $8t + 7$. L'équation

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$$

se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-2} m = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + 4t^2,$$

quand α est égal ou supérieur à 2 ; le nombre de ses solutions est alors

déterminé par le théorème XXIV (n° **32**). Quand $\alpha = 1$, un seul des trois nombres x, y, z est pair et les deux autres, impairs; on réduit à son tiers le nombre des solutions en fixant au troisième terme celui des trois carrés qui est pair; on a

$$N(2m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2) = 3N(2m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 16t^2).$$

Le dernier nombre est déterminé par le théorème XXVIII, de sorte que, en désignant par $N(2^\alpha m)$ le nombre des solutions de l'équation proposée, on a

$$N(2m) = 6\zeta_1(m) + 6(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$m = i^2 + 4s^2, \qquad (i > 0).$$

Quand $\alpha = 0$ et que $m = 8l + 3$, les trois nombres x, y, z sont impairs; on a (n° **32**)

$$N(8l + 3) = N(8l + 3 = x^2 + y^2 + z^2 + 4t^2) = 2\zeta_1(8l + 3),$$

car la dernière forme donne la congruence

$$3 \equiv 3 + 4t^2 \qquad (\text{mod. } 8),$$

d'où l'on conclut que t est pair et que l'équation ne diffère pas de la proposée.

Si l'on a $\alpha = 0$ et $m = 4l + 1$, un seul des trois nombres x, y, z est impair et les deux autres, pairs; en fixant au premier terme le carré impair, on réduit le nombre des solutions à son tiers; on a

$$N(4l + 1) = 3N(4l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2).$$

Le dernier nombre a été exprimé (n° **32**) par la formule

$$\zeta_1(4n + 1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \qquad 4n + 1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

En réunissant ces diverses conclusions, on obtient le théorème

énoncé par Liouville dans le septième Volume de la deuxième série de son Journal (38) :

XXX. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + y^2 + z^2 + 16t^2$$

est égal à

$$3\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \quad \text{à} \quad 2\zeta_1(m) \quad \text{ou à} \quad 0,$$

quand $2^\alpha m$ *est de la forme* $4n+1$, $8n+3$ *ou* $8n+7$. *Pour les valeurs paires de* $2^\alpha m$, *on a*

$$N(2m) = 6\zeta_1(m) + 6(-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$N(4m) = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m), \qquad N(8m) = 12\zeta_1(m).$$

$$N(16m) = 8\zeta_1(m), \qquad N(2^{\lambda+5}m) = 24\zeta_1(m), \qquad \lambda \geqq 0.$$

39. Posons, pour abréger,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 = (a, b, c, d).$$

Parmi les formes de ce genre étudiées par Liouville, il en reste six

$$(1, 1, 16, 16), \quad (1, 4, 16, 16), \quad (1, 16, 16, 16).$$
$$(1, 2, 2, 16), \quad (1, 8, 8, 16), \quad (1, 2, 8, 16)$$

dont la théorie n'exige que les deux fonctions numériques

$$\zeta_1(m), \quad \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i, \qquad m = i^2 + 4s^2, \qquad (i > 0).$$

La recherche des nombres des représentations d'un nombre pair par ces formes se ramène aisément aux théorèmes démontrés ci-dessus : c'est pourquoi nous considérons d'abord les nombres impairs qu'elles peuvent représenter. Les quatre formes (1, 1, 16, 16), (1, 4, 16, 16) et (1, 8, 8, 16) ne peuvent représenter aucun nombre de la forme $4n+3$. Les deux formes (1, 16, 16, 16) et (1, 8, 8, 16) ne peuvent

représenter aucun nombre de l'une des formes $4n+3$, $8n+5$; enfin les deux formes $(1, 2, 2, 16)$, $(1, 2, 8, 16)$ ne peuvent représenter aucun nombre de la forme $8l+7$.

Le nombre des représentations d'un nombre $m = 8l+1$ par chacune des deux formes $(1, 4, 16, 16)$, $(1, 16, 16, 16)$ est le même, car dans la première forme la deuxième indéterminée est nécessairement paire. Ce nombre est la moitié de celui des représentations de m par la forme $(1, 1, 16, 16)$. Si donc nous désignons par $N(m)$ et par $\mathfrak{N}(m)$ les nombres des solutions des deux équations

$$(\alpha) \qquad m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

$$(\beta) \qquad m = x^2 + 16y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

on a

$$N(8n+1) = 2\mathfrak{N}(8n+1); \qquad N(4n+3) = \mathfrak{N}(4n+3) = 0.$$

Désignons encore par $N_1(m)$ le nombre de celles des représentations de m par la forme $(1, 8, 8, 16)$ dans lesquelles la somme du deuxième et du troisième carré est un nombre impair. Le nombre de celles où la même somme est paire est égal à $\mathfrak{N}(m)$, et, conséquemment, on a

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \mathfrak{N}(m) + N_1(m);$$

car, dans l'équation

$$(\gamma) \qquad m = 8l+1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2,$$

la somme des deux carrés $y^2 + z^2$ est nécessairement paire ou impaire, et, lorsqu'elle est paire, la substitution

$$y + z = 2p, \qquad y - z = 2q, \qquad y^2 + z^2 = 2p^2 + 2q^2$$

ramène l'équation (γ) à l'équation (β).

40. Nous remarquerons d'abord que l'équation (γ) ne diffère de l'équation

$$(\delta) \qquad m = 8l+1 = x^2 + 4u^2 + 8y^2 + 8z^2$$

qu'en ce que l'on y pose $u = 2t$, ce qui est bien permis, puisque dans la dernière équation le nombre u est nécessairement pair. On a donc (n° **37**)

$$N(m = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

$$\mathfrak{N}(m) + N_1(m) = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$

$$m = 8l + 1 = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0.$$

Nous avons ainsi une première relation entre les deux nombres $\mathfrak{N}(m)$, $N_1(m)$. Pour en obtenir une seconde, nous aurons recours à la forme (1, 4, 4, 4) dont nous nous sommes occupés plus haut (n° **30**). Les solutions de l'équation

$$(e) \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 4t^2$$

se partagent en deux groupes, dont l'un renferme celles où les trois nombres y, z, t sont pairs, et l'autre, celles où deux de ces trois nombres sont impairs et l'autre, pair; on déduit en effet de l'équation (e) la congruence

$$0 \equiv y^2 + z^2 + t^2 \qquad (\text{mod } 2)$$

qui exclut toute autre hypothèse. Le nombre des solutions du premier groupe est égal à $\mathfrak{N}(m)$; celui des solutions du second groupe est égal à $3N_1(m)$; d'abord il est le triple du nombre des solutions de l'équation

$$(e') \qquad m = 8l + 1 = x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 16t^2,$$

qui vérifient la condition $y \equiv z \equiv 1 \pmod 2$. Or la substitution

$$y + z = 2p, \qquad y - z = 2q, \qquad p + q = y \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2)$$

ramène ces solutions à celles de l'équation (γ) dans lesquelles la somme de la deuxième et de la troisième indéterminée est un nombre impair.

D'ailleurs, nous avons trouvé (n° **30**) que le nombre des solutions de

l'équation (e) est égal à $2\zeta_1(m)$. On a donc

$$\mathfrak{N}(m)+3N_1(m)=2\zeta_1(m),$$
$$\mathfrak{N}(m)+\ \ N_1(m)=\zeta_1(m)+\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i;$$

on en déduit

$$\mathfrak{N}(m)=N(m=x^2+16y^2+16z^2+16t^2)=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)+\tfrac{3}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,$$
$$N_1(m)=2N'(m=x^2+8y^2+16z^2+32t^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)-\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.$$

L'accent de N', dans la dernière formule, rappelle la restriction $y\equiv 1 \pmod 2$.

41. Le nombre des solutions de l'équation

$$m=8l+5=x^2+4y^2+16z^2+16t^2$$

se déduit aisément de celui des solutions de l'équation

$$m=8l+5=x^2+4y^2+4z^2+16t^2;$$

car dans la dernière équation l'un des deux nombres y, z est impair, et l'autre, pair; en fixant au troisième terme celui qui est pair, on réduit de moitié le nombre des solutions. On a donc (n° **31**)

$$N(8l+5=x^2+4y^2+16z^2+16t^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}N(8l+5=x^2+4y^2+4z^2+16t^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\zeta_1(8l+5)+\tfrac{1}{2}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.$$

Les deux théorèmes obtenus dans ce numéro et dans le précédent relativement à la forme (1, 4, 16, 16) peuvent s'exprimer par une seule formule

$$N(m=x^2+4y^2+16z^2+16t^2)$$
$$=\tfrac{1}{2}\zeta_1(m)+\tfrac{1}{2}\left[2+(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i,$$
$$m=i^2+4s^2,\qquad i>0.$$

42. Les nombres impairs représentés par les deux formes

$$(1, 2, 2, 16), \quad (1, 2, 8, 16)$$

peuvent être compris dans les trois formules $8l+1$, $8l+3$, $8l+5$. Quand $m = 8l+1$ les deux formes se ramènent à la suivante :

$$m = 8l+1 = x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 16t^2.$$

On déduit donc de la formule donnée ci-dessus (n° **40**)

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(8l+1 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2) \\ &\quad = \mathrm{N}(8l+1 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2) \\ &\quad = \zeta_1(8l+1) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i. \end{aligned}$$

Quand $m = 8l+3$, l'un des deux nombres y, z est pair et l'autre, impair, dans la formule

$$m = 8l+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2.$$

On réduit de moitié le nombre des solutions en fixant au troisième terme celui des deux nombres y, z qui est pair. On a donc

$$\begin{aligned} &\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2) \\ &\quad = 2\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2). \end{aligned}$$

Or le dernier nombre se déduit immédiatement du théorème XXVI (n° **34**) concernant la forme $(1, 2, 4, 8)$; car l'équation

$$8l+3 = x^2 + 2y^2 + 4u^2 + 8z^2$$

exige que u soit pair; posant donc $u = 2t$, on obtient la forme $(1, 2, 8, 16)$. On a, par conséquent,

$$\mathrm{N}(8l+3 = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2) = \zeta_1(8l+3).$$

43. La forme $(1, 2, 8, 16)$ ne peut représenter aucun nombre compris

dans la formule $8l+5$. Quant à l'équation

$$8l+5=x^2+2y^2+2z^2+16t^2,$$

elle exige que les deux nombres y, z soient impairs. On peut donc poser

$$x+y=2p, \qquad x-y=2q, \qquad x=p+q\equiv 1 \qquad (\text{mod } 2),$$

ce qui ramène l'équation à la suivante

$$8l+5=x^2+4p^2+4q^2+16t^2;$$

il est inutile d'ajouter la condition $p+q\equiv 1$ (mod 2), parce qu'elle est nécessairement remplie. Le nombre $8l+5$ est ainsi représenté un même nombre de fois par chacune des deux formes (1, 2, 2, 16), (1, 4, 4, 16), et l'on déduit du théorème XXV (n° **32**) que ce nombre est exprimé par la formule suivante :

$$N(8l+5=x^2+2y^2+2z^2+16t^2)=\zeta_1(8l+5)+\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.$$

44. Les résultats obtenus nous permettent de démontrer aisément les théorèmes énoncés par Liouville concernant les formes considérées.

Prenons par exemple les deux équations

$$2^\alpha m=x^2+8y^2+8z^2+16t^2,$$
$$2^\alpha m=x^2+16y^2+16z^2+16t^2.$$

Les nombres des solutions de ces équations sont déterminés dans le n° **40**, pour le cas où, α étant nul, $m=8l+1$. Ces nombres sont nuls quand $\alpha=1$, et aussi quand α est nul et que m est de l'une des formes $4n+3$, $8l+5$. Quand α est égal ou supérieur à 2, les équations proposées se ramènent respectivement aux deux suivantes

$$2^{\alpha-2}m=x^2+2y^2+2z^2+4t^2,$$
$$2^{\alpha-2}m=x^2+4y^2+4z^2+4t^2,$$

dont la théorie a été faite dans les n^{os} **29** et **30**. On obtient par là le théorème suivant, que Liouville a donné dans le septième Volume de son Journal (2e série, p. 77).

XXXI. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 16(y^2 + z^2 + t^2).$$

1° $N = 0$:

$$si\ n = 4l + 3, \qquad 8l + 5, \quad 4l + 2\ ou\ 4(4l + 3);$$

2° $n = 8l + 1$:

$$N = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right], \qquad m = i^2 + 4s^2, \qquad i > 0:$$

3° $n = 4(4l + 1) = 4m$:

$$N = 2\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 3$,

$$N = 0, \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m).$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha \geqq 5$.

Liouville a étudié la forme (1, 8, 8, 16) dans le Volume cité (p. 13); il énonce les résultats auxquels nous sommes parvenus ci-dessus.

45. On obtient aussi aisément les nombres des solutions des deux équations

$$(\alpha) \qquad 2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2,$$

$$(\beta) \qquad 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

dont Liouville s'est occupé dans le Volume cité (p. 117, 105). Si l'on désigne ces deux nombres de solutions par $N(2^\alpha m)$ et par $\mathfrak{N}(2^\alpha m)$, on a entre eux les relations suivantes (n° **39**)

$$N(4n + 1) = 2\mathfrak{N}(4n + 1), \qquad N(4n + 3) = \mathfrak{N}(4n + 3) = 0.$$

On a aussi $\mathfrak{N}(2m) = 0$ quand $\alpha = 1$; pour les valeurs de α supérieures à 1, les équations proposées se ramènent à l'équation

$$(D) \qquad 2^{\alpha-2} m = x^2 + y^2 + 4z^2 + 4t^2.$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXI (n° **28**). Il reste à chercher le nombre $N(2m)$ des solutions de l'équation

$$2m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

Les deux nombres x, y étant impairs, on peut poser

$$x + y = 2p, \qquad x - y = 2q, \qquad x = p + q \equiv 1 \qquad (\mathrm{mod}\, 2);$$

on ramène ainsi l'équation proposée à la suivante :

$$m = p^2 + q^2 + 8z^2 + 8t^2.$$

On a ainsi (n° **57**)

$$N(2m) = 0 \qquad \text{ou} \qquad N(2m) = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right],$$

suivant que l'on a $m = 4l + 3$ ou $m = 4l + 1 = i^2 + 4s^2$ $(i > 0)$.

Quant au nombre $\mathfrak{N}(4n + 1)$, il est exprimé (n° **41**) par la formule

$$\mathfrak{N}(m) = \tfrac{1}{2}\zeta_1(m) + \tfrac{1}{2}\left[2 + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i,$$
$$m = i^2 + 4s^2 \qquad (i > 0).$$

En réunissant ces résultats, nous obtenons les théorèmes de Liouville, énoncés dans les deux passages cités :

XXXII. *Désignons par* $\mathfrak{N}$ *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 4y^2 + 16z^2 + 16t^2.$$

On a $\mathfrak{N} = 0$ *si* n *est de l'une des formes* $4l + 3$, $4l + 2$, $4(4l + 3)$.

$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + 3\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \qquad si \qquad m = 8l + 1, \qquad \alpha = 0,$$
$$\mathfrak{N} = \tfrac{1}{2}\left[\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \qquad si \qquad m = 8l + 5, \qquad \alpha = 0.$$

Pour $\alpha = 2$, *on a*

$$\mathfrak{N} = 4\zeta_1(m) \qquad ou \qquad \mathfrak{N} = 0,$$

suivant que $m = 4l + 1$ *ou* $4l + 3$.

Pour $\alpha > 2$, *on a*

$$\mathfrak{N} = 4\zeta_1(m), \qquad \mathfrak{N} = 8\zeta_1(m), \qquad \mathfrak{N} = 24\zeta_1(m),$$

suivant que α *est égal à* 3, *à* 4, *ou qu'il est supérieur à* 4.

XXXIII. *Désignons par* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + y^2 + 16z^2 + 16t^2$$

et par $\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ *une somme relative aux valeurs entières et positives de* i *qui peuvent figurer dans l'équation*

$$m = i^2 + 4s^2.$$

Le nombre N *est déterminé par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N = 0 \qquad ou \qquad N = \zeta_1(m) + \left[2 + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\right]\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

suivant que m *est de la forme* $4l + 3$ *ou de la forme* $4l + 1$.

2° $\alpha = 1$:

$$N = 0 \qquad ou \qquad N = 2\zeta_1(m) + 2(-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i.$$

suivant que l'on a $m = 4l + 3$ *ou* $m = 4l + 1$.

3° $\alpha = 2$:

$$N = 0 \qquad ou \qquad N = 4\zeta_1(m),$$

suivant que $m = 4l + 3$ *ou* $4l + 1$.

4° $\alpha \geqq 3$:

$$N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m) \qquad ou \qquad N = 24\zeta_1(m).$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$, $\alpha \geqq 5$.

46. La forme $(1, 2, 8, 16)$ ne peut représenter que des nombres pairs et des nombres impairs de l'une des deux formes $8l+1$, $8l+3$. Nous avons trouvé (n° **43**) que le nombre des représentations d'un nombre impair m par cette forme est égal à

$$\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad \text{ou à} \quad \zeta_1(m),$$

suivant que m est de la forme $8l+1$ ou de la forme $8l+3$. Pour les nombres pairs, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

exige que la valeur de x soit paire; elle se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + 2x_1^2 + 4z^2 + 8t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXVI (n° **34**).

Nous obtenons ainsi le théorème énoncé par Liouville à la page 153 du Volume cité :

XXXIV. *Le nombre des solutions de l'équation*

$$n = 2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 16t^2$$

est exprimé, suivant les cas, par l'une des formules suivantes :

1° $\alpha = 0$:

$$m = 8l+5 \quad ou \quad 8l+7, \qquad N = 0,$$
$$m = 8l+1 \quad ou \quad 8l+3, \qquad N = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad ou \quad \zeta_1(m);$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = \zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \qquad ou \qquad N = \zeta_1(m),$$

suivant que $m = 4l+1$ *ou* $4l+3$;

3° $\alpha \geqq 2$:

$$N = 2\zeta_1(m), \qquad N = 4\zeta_1(m), \qquad N = 8\zeta_1(m), \qquad N = 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 2$, $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ ou $\alpha > 4$.

47. La forme $(1, 2, 2, 16)$ peut représenter tous les nombres entiers, excepté les nombres impairs de la forme $8l + 7$. Pour les autres nombres impairs, nous avons trouvé (n° **43**) que le nombre de leurs représentations par la forme $(1, 2, 2, 16)$ est égal à

$$\zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i \quad \text{si } m = i^2 + 4s^2 \quad (i > 0);$$

à

$$2\zeta_1(m) \quad \text{si } m = 8l + 3.$$

Pour les nombres pairs, l'équation

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2$$

se ramène à la suivante

$$2^{\alpha-1} m = y^2 + z^2 + 2x_1^2 + 8t^2,$$

dont le nombre des solutions est déterminé par le théorème XXVII (n° **35**).

En réunissant ces résultats, nous obtenons le théorème énoncé par Liouville à la page 161 du Volume cité :

XXXV. *Soit* N *le nombre des solutions de l'équation*

$$2^\alpha m = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 16t^2;$$

désignons par $\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$ *une somme dont les éléments correspondent aux diverses solutions de l'équation*

$$m = i^2 + 4s^2$$

en nombres entiers i, s, *le premier, positif, et le second, indifférem-*

ment positif, négatif ou nul. Le nombre N *est exprimé, suivant les cas, par les formules suivantes :*

1° $\alpha = 0$:

$$N = \zeta_1(m) + \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} \quad si\ m = 4l+1,$$

$$N = 2\zeta_1(m) \quad si\ m = 8l+3, \qquad N = 0 \quad si\ m = 8l+7;$$

2° $\alpha = 1$:

$$N = 2\left[\zeta_1(m) + (-1)^{\frac{m^2-1}{8}} \Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i\right] \quad si\ m = 4l+1,$$

$$N = 2\zeta_1(m) \quad si\ m = 4l+3;$$

3° $\alpha = 2$:

$$N = 2\left[2 + (-1)^{\frac{m-1}{2}}\right]\zeta_1(m);$$

4° $\alpha \geqq 3$:

$$N = 12\zeta_1(m), \quad 8\zeta_1(m) \quad ou \quad 24\zeta_1(m),$$

suivant que l'on a $\alpha = 3$, $\alpha = 4$ *ou* $\alpha > 4$.

48. L'emploi de la fonction

$$\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}} i$$

montre que Liouville a déduit des relations entre les séries elliptiques plusieurs de ses théorèmes relatifs à la théorie des formes quadratiques quaternaires. On peut résoudre les mêmes questions avec les formules générales données dans la première section; mais, au lieu de la somme relative aux valeurs entières et positives de i qui figurent dans les solutions de l'équation

$$m = i^2 + 4s^2,$$

on trouve une autre fonction numérique dont le calcul est plus compliqué. Pour l'obtenir, on décompose le double du nombre impair m en deux parties impaires et positives

$$(a) \qquad 2m = m' + m'';$$

puis, pour chaque décomposition, on calcule pour chacun des deux nombres m', m'' l'excès du nombre des diviseurs $16l + (1, 7)$ sur le nombre des diviseurs $16l + (9, 15)$, et l'on désigne ces deux nombres par $E_1(m')$, $E_1(m'')$; on calcule aussi l'excès $E_2(m')$ du nombre des diviseurs $16l + (3, 5)$ de m' sur le nombre des diviseurs $16l + (11, 13)$; on détermine le nombre analogue $E_2(m'')$; enfin on forme la somme

$$E_1(m')E_1(m'') + E_2(m')E_2(m''),$$

que l'on multiplie par $(-1)^{\frac{m'-1}{2}}$. La somme de tous les produits semblables qui correspondent aux diverses décompositions de $2m$ en deux parties impaires et positives peut remplacer, dans les théorèmes précédents, la fonction introduite par les formules empruntées à la théorie des fonctions elliptiques. Les deux fonctions sont reliées entre elles par la relation

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^{\frac{m'-1}{2}}[E_1(m')E_1(m'') + E_2(m')E_2(m'')] \\ = (-1)^{\frac{m^2-1}{8}}\Sigma(-1)^{\frac{i-1}{2}}i.\end{aligned}$$

On abrège le calcul de la première fonction en observant que

$$\begin{aligned}
E_1(m) &= 0, && \text{si } m = 16l + (9, 15),\\
E_2(m) &= 0, && \text{si } m = 16l + (1, 7),\\
E_1(m) &= E_2(m), && \text{si } m = 16l + (3, 5),\\
E_1(m) &= -E_2(m), && \text{si } m = 16l + (11, 13).
\end{aligned}$$

Pour plusieurs des formes quadratiques précédentes, Liouville a distingué le nombre des solutions propres, dans lesquelles le plus grand diviseur commun des quatre indéterminées est égal à 1. Il a fait la même distinction pour plusieurs des équations dont nous avons encore à nous occuper. Le mode de démonstration étant le même pour toutes ces équations, il est avantageux de les reprendre ensemble à ce point de vue.

Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes;

PAR M. HAMY.

Les premières recherches réellement importantes sur la théorie mathématique de la figure des planètes, supposées fluides et hétérogènes, datent de l'année où Clairaut publia son admirable Livre sur la figure de la Terre (1743). Tous les efforts dépensés postérieurement par les géomètres, sur ce sujet, ont eu pour objet la vérification et l'extension des résultats établis dans l'Ouvrage de Clairaut. La connaissance du rapport des axes du globe est longtemps restée entourée d'une grande incertitude; aussi le célèbre analyste ne put-il soumettre ses travaux à un contrôle sérieux. Du temps de Laplace on attribuait à l'aplatissement la valeur $\frac{1}{335}$, en se fondant sur les opérations géodésiques entreprises en vue de l'établissement du mètre. Bessel admettait le nombre $\frac{1}{299}$. On est arrivé tout récemment à la fraction $\frac{1}{292}$ qui, d'après M. Faye, présenterait de grandes garanties : l'erreur commise sur le dénominateur ne dépasserait guère l'unité [1]. En possession de données déterminées avec précision, il était important de faire subir un contrôle décisif aux idées de Clairaut. C'est ce qu'ont fait successivement M. Roche [2]

[1] FAYE, *Cours d'Astronomie de l'École Polytechnique*, Ire Partie, p. 332.

[2] *Mémoire sur l'état intérieur du globe terrestre* (*Mémoires de l'Académie des Sciences de Montpellier*, t. X).

et M. Tisserand ([1]). L'examen des principales hypothèses proposées jusqu'ici pour la loi des densités à l'intérieur de la Terre a conduit M. Tisserand à des résultats du plus haut intérêt. Toutes ces hypothèses, très différentes les unes des autres, s'accordent entre elles pour faire prendre des valeurs voisines du nombre 1,988 à un certain rapport I, tandis que le phénomène de la précession des équinoxes, base d'une incontestable solidité, exigerait $I = 1,955$. Voici comment s'exprime M. Tisserand en présence de ce désaccord : « Il semble que les conditions imposées aient pour effet de resserrer la valeur de I entre deux limites très voisines : c'est ce que M. Roche paraît avoir remarqué le premier. Il reste donc à trouver une loi de densité donnant pour I la valeur observée, ou bien à prouver que, quelle que soit la loi de densité, on ne pourra établir l'accord cherché. » M. Radau ([2]), puis M. Poincaré ([3]) ont confirmé cette façon de penser. Il résulte de leurs travaux que I est compris entre des limites rapprochées, toutes deux notablement supérieures au nombre fourni par la précession. Au surplus, M. Callandreau ([4]) a montré dans un important Mémoire que le désaccord ne peut être mis sur le compte des termes négligés dans les approximations, et a étendu, dans une Note récente ([5]), les résultats obtenus par MM. Radau et Poincaré au cas où la densité des couches de Clairaut varierait d'une façon discontinue.

Cet ensemble de faits prouve que la constitution interne de la Terre, telle qu'elle a été envisagée par Clairaut, doit subir des modifications, puisque les mesures géodésiques établissent que notre globe est sensiblement limité par un ellipsoïde.

Dans ces conditions, j'ai pensé qu'il y avait lieu de mettre en lumière certains faits intimement liés à la nature de la surface qui limite les planètes et indépendants de toute conjecture sur leur constitution physique. Les résultats auxquels je suis arrivé auraient pu s'obtenir,

---

([1]) *Bulletin astronomique*, t. I, p. 417 et 521.

([2]) *Ibid.*, t. II.

([3]) *Ibid.*, t. VI.

([4]) *Mémoire sur la théorie de la figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

([5]) *Bulletin astronomique*, t. VI.

pour la plupart, en s'appuyant sur la théorie générale du potentiel et en faisant intervenir les résultats de Clairaut. J'ai procédé d'une façon différente, afin d'établir plusieurs formules utilisées à la fin du présent travail dans l'étude d'une question proposée par M. Poincaré [1].

Voici l'exposé sommaire des différents articles :

INTRODUCTION.

Paragraphes.

I, II et III. Analyse des Mémoires de Liouville sur les fonctions de Lamé (*Journal de Mathématiques*, t. XI).

IV. Calcul de quelques fonctions de Lamé.

CHAPITRE I.

ELLIPSOIDE A TROIS AXES.

I et II. Potentiel d'un ellipsoïde hétérogène pour un point extérieur.

III et IV. Potentiel d'un ellipsoïde homogène. Identité de la formule et de celle de Dirichlet.

V. Propriété des polynômes RMN à trois variables de Lamé.

VI. Moments d'inertie d'un ellipsoïde hétérogène relativement à ses axes. Expression de deux intégrales de la forme

$$\int\int l(\mathrm{MN})^2 d\omega.$$

VII. Ellipsoïde hétérogène animé d'un mouvement de rotation et dont la surface est de niveau. Le centre de gravité est au centre de l'ellipsoïde. Les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité sont dirigés suivant les axes de l'ellipsoïde.

VIII. Le potentiel extérieur de l'ellipsoïde ne dépend que des données superficielles (th. de Stockes). Il en est de même des différences des moments d'inertie relatifs au centre de gravité.

CHAPITRE II.

ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION APLATI.

I. Potentiel extérieur. Moments d'inertie.

II. Ellipsoïde hétérogène animé d'un mouvement de rotation et dont la

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1888, 1er semestre.

Paragraphes.

surface est de niveau. Les moments d'inertie équatoriaux sont égaux. $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ s'exprime au moyen des données superficielles. Gravité. Potentiel extérieur.

III. Expression de la pesanteur à la surface d'un ellipsoïde peu aplati.

IV. Expression de $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ pour une planète peu aplatie.

V. Expression de $\frac{C-A}{C}$ pour une planète peu aplatie.

VI. Extension d'un théorème de M. Stieltjes donnant une limite inférieure de la densité au centre d'une planète.

VII. Potentiel extérieur d'une planète.

CHAPITRE III.

SUR UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

I. Si une masse hétérogène solide est recouverte de deux fluides en équilibre, superposés et limités par des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes sont homofocaux.

II et III. Discussion des équations d'équilibre dans le cas de l'ellipsoïde à trois axes.

IV. Discussion des équations d'équilibre dans le cas de l'ellipsoïde de révolution aplati. La masse imaginée par M. Poincaré ne peut exister dans le système planétaire. Une masse fluide en équilibre ne peut être composée de couches ellipsoïdales de différentes densités.

INTRODUCTION.

I. — Coordonnées elliptiques.

L'équation

$$(1') \qquad \frac{x^2}{t^2} + \frac{y^2}{t^2-b^2} + \frac{z^2}{t^2-c^2} = 1,$$

où b et c désignent deux constantes ($b < c$) et t un paramètre variable, définit toutes les surfaces du second ordre, homofocales entre elles. Ces surfaces passent au nombre de trois par tout point (x, y, z) de l'espace, où elles se rencontrent orthogonalement, lorsqu'on donne à t^2 des valeurs convenables qui sont les racines de l'équation (1'), du troisième degré en t^2, séparées comme il suit :

$$0 < \nu^2 < b^2 < \mu^2 < c^2 < \rho^2.$$

On appelle ρ, μ, ν les coordonnées elliptiques du point (x, y, z). Les relations entre les coefficients et les racines

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \rho^2 + \mu^2 + \nu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2, \\ \rho^2\mu^2 + \rho^2\nu^2 + \mu^2\nu^2 &= (b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2, \\ \rho^2\mu^2\nu^2 &= b^2c^2x^2 \end{aligned}\right.$$

conduisent aux formules dont on se sert pour passer des coordonnées rectangulaires aux coordonnées elliptiques

$$\begin{aligned} bcx &= \rho\mu\nu, \\ b\sqrt{c^2 - b^2}\,y &= \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}, \\ c\sqrt{c^2 - b^2}\,z &= \sqrt{\rho^2 - c^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}; \end{aligned}$$

ρ et μ sont des quantités positives limitées comme il vient d'être dit; ν peut prendre toutes les valeurs comprises entre $-b$ et $+b$; les radicaux $\sqrt{\mu^2 - b^2}$, $\sqrt{c^2 - \mu^2}$, $\sqrt{b^2 - \nu^2}$ sont tantôt positifs, tantôt négatifs.

Au paramètre ρ correspond un ellipsoïde, à μ un hyperboloïde à une nappe, à ν un hyperboloïde à deux nappes. Dans ce système de coordonnées, l'équation $\rho =$ const. définit un ellipsoïde, et tous les ellipsoïdes qui correspondent à des valeurs différentes de la constante sont homofocaux.

Considérons l'ellipsoïde de paramètre ρ

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c^2} = 1,$$

et un point $m(\rho, \mu, \nu)$, de cette surface. Liouville [1] donne les formules suivantes bien simples à établir.

La portion infiniment petite ds de la normale à l'ellipsoïde au point (ρ, μ, ν), comprise entre l'ellipsoïde (ρ) et l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho + d\rho)$, a pour valeur

$$(2) \qquad ds = \frac{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}\, d\rho.$$

La longueur de la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent en m est

$$P = \rho \frac{\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}.$$

Liouville pose

$$(3) \qquad \frac{P}{\rho\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}} = l$$

et donne, pour la valeur de l'élément $d\omega$ de surface au point m,

$$d\omega = d\mu\, d\nu \frac{(\mu^2 - \nu^2)\sqrt{\rho^2 - \mu^2}\sqrt{\rho^2 - \nu^2}}{\sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}\sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2}}.$$

On voit que le produit $l\,d\omega$ est indépendant de ρ. Liouville fait remarquer que $l\,d\omega$ peut s'exprimer par un élément $d\sigma$ de surface sphérique de rayon 1 qui décrit toute la sphère lorsque l'élément $d\omega$ décrit l'ellipsoïde.

II. — Fonctions de Lamé.

Dans ses recherches sur l'équilibre de température d'un ellipsoïde, Lamé a considéré des fonctions $R(\rho)$ de la forme suivante

$$R = P_n, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-1},$$

$$R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\, P'_{n-1}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}\, P_{n-2},$$

[1] Première Lettre à Blanchet (*Journal de Mathématiques*, t. XI).

où P_n, P_{n-1}, P'_{n-1}, P_{n-2} désignent des polynômes entiers en ρ de degré n, $n-1$, $n-2$, formés de termes de même parité. Ces fonctions R vérifient l'équation

$$(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - b^2 - c^2)\frac{dR}{d\rho} = [n(n+1)\rho^2 - B]R,$$

et c'est de là dont on part pour calculer de proche en proche les coefficients des polynômes P par identification; B est un paramètre constant, différent pour toutes les fonctions R relatives à un même entier n. Dans chaque cas particulier, cette constante est assujettie à vérifier les équations auxquelles on est conduit dans la recherche de la valeur des coefficients des polynômes P.

Lamé a montré qu'à chaque entier n correspondent $2n+1$ valeurs réelles de B et par suite $2n+1$ fonctions R ([1]). A la vérité, ces fonctions R ne sont ainsi déterminées qu'à un facteur constant près. On précise leur définition en convenant de prendre égal à l'unité le coefficient de la plus haute puissance de ρ dans chacun des polynômes P.

A la fonction R, Liouville (Mémoire déjà cité, p. 222) a joint une autre fonction de ρ qui satisfait à la même équation différentielle

$$S = (2n+1)R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Pour toutes les valeurs de $\rho > c$ l'intégrale a un sens, l'équation $R = 0$ ayant toutes ses racines inférieures à c ([2]).

Nous modifierons légèrement la fonction de Liouville, afin de nous débarrasser du facteur $2n+1$. Nous prendrons pour définition de S

$$(4) \qquad S = R\int_\rho^\infty \frac{d\rho}{R^2\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Outre la fonction R, Lamé a considéré deux autres fonctions M et N.

([1]) *Voir* à ce sujet le Mémoire de M. Poincaré, *Sur l'équilibre d'une masse fluide* (*Acta Mathematica*, t. VII, p. 301 et suiv.).

([2]) Liouville, deuxième Lettre à Blanchet (*Journal de Mathématiques*, t. XI).

la première de μ et la seconde de ν. On les déduit de R par le changement respectif de

$$\rho, \quad \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad \sqrt{\rho^2 - c^2}$$

en

$$\mu, \quad \sqrt{\mu^2 - b^2}, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} \quad \text{ou} \quad \nu, \quad \sqrt{b^2 - \nu^2}, \quad \sqrt{c^2 - \nu^2}.$$

Lamé a établi que le produit de R par les deux fonctions conjuguées M et N, $u = \mathrm{RMN}$ vérifie l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{U}}{\partial z^2} = 0.$$

Le produit SMN de Liouville jouit de la même propriété. En outre, le produit RMN de trois fonctions conjuguées quelconques relatives à un entier n est exprimable en un polynôme entier en x, y, z de degré n.

Nous renvoyons pour la démonstration de tous ces résultats aux Mémoires de Liouville, pour ce qui regarde la fonction S; à ceux de Lamé insérés dans le t. IV du *Journal de Mathématiques* et au *Cours d'Analyse* de M. Jordan, IIIe Volume, où les travaux de Lamé sont résumés.

Nous ferons usage dans la suite de quelques propriétés des fonctions de Lamé.

Appelons Δ la distance de deux points $m(\rho, \mu, \nu)$ et $m'(\rho', \mu', \nu')$, $d\omega'$ un élément de surface de l'ellipsoïde (ρ') en m' et considérons comme appartenant au point m les fonctions S, R, M, N de ρ, μ, ν et au point m' les fonctions S', R', M', N' de ρ', μ', ν'; l' étant la quantité $\frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - \mu'^2}\sqrt{\rho'^2 - \nu'^2}}$ définie plus haut, on a

$$(5) \quad \begin{cases} \displaystyle\int\int_{(\rho')} \frac{l'\mathrm{M'N'}}{\Delta}\, d\omega' = 4\pi \mathrm{S'RMN}, & \text{si } \rho < \rho'; \\ \displaystyle\int\int_{(\rho')} \frac{l'\mathrm{M'N'}}{\Delta}\, d\omega' = 4\pi \mathrm{R'SMN}, & \text{si } \rho > \rho'. \end{cases}$$

$(\mathrm{M'N'})_1$, $(\mathrm{M'N'})_2$ désignant deux produits M'N' quelconques, mais

distincts, on a

$$(6)\qquad \iint_{(\rho')} l'(M'N')_1(M'N')_2\,d\omega' = 0.$$

En particulier, si l'un des produits $M'N'$ a la valeur 1 correspondant à $n = 0$,

$$(7)\qquad \iint_{(\rho')} l'M'N'\,d\omega' = 0, \quad \text{sauf pour } M'N' = 1.$$

L'intégrale $\iint_{(\rho')} l'(M'N')^2\,d\omega'$ est positive et indépendante de ρ', le produit $l'\,d\omega'$ étant positif et indépendant de ρ'.

Les démonstrations de ces propriétés données dans le second Mémoire de Liouville déjà cité reposent sur un mode de raisonnement analogue à celui que l'on suit pour établir la formule de Green. L'emploi de cette formule permettrait, tout en conservant la marche générale adoptée par Liouville, de simplifier très notablement son analyse.

III.

Les résultats précédents ne peuvent être appliqués directement à l'ellipsoïde de révolution aplati ou allongé. Ce dernier ne présentant pas d'intérêt pour notre objet, nous nous occuperons seulement de l'ellipsoïde aplati qui correspond à $b = 0$. b et ν s'évanouissant simultanément, la position d'un point sur l'ellipsoïde n'est plus définie. Il faut donc modifier la définition de ν.

Avant de faire $b = 0$, posons

$$\nu = b\nu_1;$$

ν_1 varie entre -1 et $+1$. Nous prendrons comme troisième coordonnée elliptique la limite de ν_1 pour $b = 0$. Les formules liant $\rho\mu\nu_1$ à xyz sont

$$(8)\qquad \left\{\begin{aligned} \rho^2 + \mu^2 &= x^2 + y^2 + z^2 + c^2,\\ \rho^2\mu^2 &= c^2(x^2 + y^2),\\ \rho^2\mu^2\nu_1^2 &= c^2x^2. \end{aligned}\right.$$

Remplaçons de même ν par $b\nu_1$ dans la fonction générale N, supprimons autant de fois que possible le facteur b, faisons $b = 0$ et ramenons à l'unité le coefficient de la plus haute puissance de ν_1. La fonction de ν_1 ainsi obtenue sera notre nouvelle fonction N, dont les propriétés sont bien faciles à déduire de celles de la fonction générale.

Les expressions de R, M, N correspondant à un entier n sont connues dans le cas de l'ellipsoïde de révolution. Dans son second Mémoire, Liouville s'est occupé de l'ellipsoïde allongé. Un raisonnement parallèle au sien conduirait aux formules suivantes pour l'ellipsoïde de révolution aplati

$$R = \frac{(c^2+t^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\dots(n-i+1)}\,\frac{d^{i+n}(c^2+t^2)^n}{dt^{i+n}} \qquad \text{où} \qquad t = \sqrt{\rho^2 - c^2},$$

$$M = \frac{(c^2-q^2)^{\frac{i}{2}}}{2n(2n-1)\dots(n-i+1)}\,\frac{d^{i+n}(c^2-q^2)^n}{dq^{i+n}} \qquad \text{où} \qquad q = \sqrt{c^2 - \mu^2},$$

$$\left.\begin{aligned} 2^{i-1}N = \nu_1^i &- \frac{i(i-1)}{1.2}\nu_1^{i-2}(1-\nu_1^2) \\ &+ \frac{i(i-1)(i-2)(i-3)}{1.2.3.4}\nu_1^{i-4}(1-\nu_1^2)^2 - \dots \end{aligned}\right\} \quad i > 0,$$

$$\left.\begin{aligned} 2^{i-1}N = \sqrt{1-\nu_1^2}\Big[i\nu_1^{i-1} &- \frac{i(i-1)(i-2)}{1.2.3}\nu_1^{i-3}(1-\nu_1^2) \\ &+ \frac{i(i-1)\dots(i-4)}{1.2.3.4.5}\nu_1^{i-5}(1-\nu_1^2)^2\dots\Big] \end{aligned}\right\} \quad i > 0,$$

et pour $i = 0$

$$N = 1.$$

i est un entier qui doit recevoir successivement les valeurs 0, 1, 2, ..., n. A chaque entier $i > 0$ correspond une fonction R, une fonction M et deux fonctions N; pour $i = 0$, on n'a qu'une seule valeur de N, égale à 1.

Les fonctions conjuguées répondant à la même valeur de i, on trouve $2n+1$ produits MN différents ([1]) pour chaque entier n.

([1]) Liouville pose $\nu = b\cos\psi$ et trouve, pour la fonction N, $N = \cos i\psi$ ou $\sin i\psi$ (i est défini dans le texte). Nous avons introduit ν_1 pour conserver plus d'homogénéité dans les notations. Ces formules générales ne seront d'ailleurs pas utilisées dans le cours du présent travail.

En terminant cet aperçu sommaire, nous rappellerons un important résultat.

Toute fonction continue ou discontinue de μ et de ν peut être développée en une série de produits MN de la forme ΣAMN, où A désigne un coefficient indépendant de μ et de ν.

Pour que deux séries de cette nature soient identiques, il faut que les coefficients des mêmes produits MN soient égaux.

IV. — Calcul de quelques fonctions de Lamé.

La fonction qui correspond à $n = 0$ est $R = 1$.

Il y a trois fonctions R correspondant à $n = 1$, de la forme P_1, $P_0\sqrt{\rho^2 - b^2}$, $P_0\sqrt{\rho^2 - c^2}$; P_1, P_0 sont des polynômes formés de termes de même parité d'un degré égal à leur indice. Les fonctions du premier degré sont donc

$$R = \rho, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Il y a cinq fonctions R correspondant à $n = 2$. Elles sont de la forme

$$P_2, \quad P_1\sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad P_1\sqrt{\rho^2 - c^2}, \quad P_0\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

Les trois dernières formes donnent de suite

$$R = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}.$$

et la première

$$R = \rho^2 - A;$$

A étant une constante à déterminer à l'aide de l'équation qui doit devenir identique

$$(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2)\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho(2\rho^2 - b^2 - c^2)\frac{dR}{d\rho} = (6\rho^2 - B)R.$$

Substituant notre valeur de R,

$$2(\rho^2 - c^2)(\rho^2 - b^2) + 2\rho^2(2\rho^2 - b^2 - c^2) = (6\rho^2 - B)(\rho^2 - A),$$

on est conduit à

$$-4(b^2 + c^2) = -B - 6A,$$
$$2b^2c^2 = BA.$$

Éliminant B,

$$(9) \qquad 3A^2 - 2(b^2 + c^2)A + b^2c^2 = 0.$$

Cette équation définit deux valeurs positives de A inférieures à c^2. Soient h^2 la plus grande; k^2 la plus petite. Les deux autres fonctions du second degré sont $\rho^2 - h^2$ et $\rho^2 - k^2$.

En résumé :

Pour $n = 0$,

$$R = 1, \qquad M = 1, \qquad N = 1;$$

Pour $n = 1$,

$$R = \rho, \qquad M = \mu, \qquad N = \nu,$$
$$R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad M = \sqrt{\mu^2 - b^2}, \qquad N = \sqrt{b^2 - \nu^2},$$
$$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad M = \sqrt{c^2 - \mu^2}, \qquad N = \sqrt{c^2 - \nu^2};$$

Pour $n = 2$,

$$R = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, \qquad M = \mu\sqrt{\mu^2 - b^2}, \qquad N = \nu\sqrt{b^2 - \nu^2},$$
$$R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad M = \mu\sqrt{c^2 - \mu^2}, \qquad N = \nu\sqrt{c^2 - \nu^2},$$
$$R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad M = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{c^2 - \mu^2}, \qquad N = \sqrt{b^2 - \nu^2}\sqrt{c^2 - \nu^2},$$
$$R = \rho^2 - h^2, \qquad M = \mu^2 - h^2, \qquad N = \nu^2 - h^2,$$
$$R = \rho^2 - k^2, \qquad M = \mu^2 - k^2, \qquad N = \nu^2 - k^2.$$

En employant les formules qui lient x, y, z et ρ, μ, ν, on trouve que

$$
(10)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
\text{pour } R = 1, & \text{on a} & RMN = 1; \\
R = \rho, & & RMN = bcx, \\
R = \sqrt{\rho^2 - b^2}, & & RMN = b\sqrt{c^2 - b^2}\, y, \\
R = \sqrt{\rho^2 - c^2}, & & RMN = c\sqrt{c^2 - b^2}\, z; \\
R = \rho\sqrt{\rho^2 - b^2}, & & RMN = b^2 c\sqrt{c^2 - b^2}\, xy, \\
R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}, & & RMN = bc^2\sqrt{c^2 - b^2}\, xz, \\
R = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\rho^2 - c^2}, & & RMN = bc(c^2 - b^2)\, yz, \\
R = \rho^2 - h^2, & & RMN = b^2c^2x^2 + h^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\
 & & \qquad - h^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - h^6, \\
R = \rho^2 - k^2, & & RMN = b^2c^2x^2 + k^4(x^2 + y^2 + z^2 + b^2 + c^2) \\
 & & \qquad - k^2[(b^2 + c^2)x^2 + c^2y^2 + b^2z^2 + b^2c^2] - k^6.
\end{array}
\right.
$$

Ellipsoïde de révolution aplati.

On pourrait faire usage des formules générales données plus haut, mais il est tout aussi simple de partir des expressions qui viennent d'être établies. Nous remarquerons à cet effet que pour b petit

$$h^2 = \frac{2c^2}{3} + \text{des termes contenant } b^2 \text{ en facteur,}$$

$$k^2 = \frac{b^2}{2} + \text{des termes contenant } b^4 \text{ en facteur.}$$

Après avoir remplacé h^2 et k^2 par ces valeurs, ν par $b\nu_1$ et supprimé autant de fois qu'il s'y trouve le facteur b dans N, nous faisons $b = 0$ et ramenons le coefficient de la plus haute puissance de ν_1 à l'unité. On arrive ainsi à ce qui suit :

					Facteurs constants supprimés dans la fonction générale N.
	$n = 0$, $R = 1$.	$M = 1$.	$N = 1$,	$RMN = 1$:	1.
	$n = 1$, $R = \rho$.	$M = \mu$.	$N = \nu_1$,	$RMN = cx$.	b.
	$R = \rho$,	$M = \mu$.	$N = \sqrt{1-\nu_1^2}$.	$RMN = cy$.	b.
	$R = \sqrt{\rho^2 - c^2}$.	$M = \sqrt{c^2 - \mu^2}$,	$N = 1$,	$RMN = cz$:	c.
(·1)	$n = 2$, $R = \rho^2$.	$M = \mu^2$.	$N = \nu_1\sqrt{1-\nu_1^2}$,	$RMN = c^2 xy$.	b^2.
	$R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}$,	$M = \mu\sqrt{c^2 - \mu^2}$.	$N = \nu_1$,	$RMN = c^2 xz$.	bc.
	$R = \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}$.	$M = \mu\sqrt{c^2 - \mu^2}$,	$N = \sqrt{1-\nu_1^2}$,	$RMN = c^2 yz$.	bc.
	$R = \rho^2 - \frac{2c^2}{3}$,	$M = \mu^2 - \frac{2c^2}{3}$,	$N = 1$,	$RMN = -\frac{c^2}{3}\left[2z^2 - (x^2 + y^2) + \frac{2c^2}{3}\right]$,	$-\frac{2c^2}{3}$.
	$R = \rho^2$,	$M = \mu^2$,	$N = \nu_1^2 - \frac{1}{2}$,	$RMN = \frac{c^2}{2}(x^2 - y^2)$.	b^2.

CHAPITRE I.

POTENTIEL D'UN ELLIPSOIDE HÉTÉROGÈNE POUR UN POINT EXTÉRIEUR.

I.

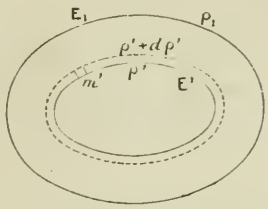
Soit une masse hétérogène limitée par l'ellipsoïde E_1 (*fig.* 1), ayant pour équation

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c^2} = 1.$$

Considérons l'ellipsoïde homofocal E', de paramètre ρ', et désignons par ρ', μ', ν' les coordonnées elliptiques d'un point m', placé sur cette

surface, par rapport à l'ellipsoïde E_1. Appelons M' et N' les fonctions conjuguées d'une fonction de Lamé quelconque R'.

Fig. 1.



Le long de E' la densité δ est une fonction de μ' et ν' qui peut être discontinue. On peut néanmoins la développer en une suite de produits $M'N'$, comme il suit

$$(12) \qquad \frac{\delta}{l'^2} = \sum \mathcal{A}' M' N',$$

où $\mathcal{A}'$ ne dépend que de ρ' et où l' est la quantité introduite par Liouville (3)

$$l' = \frac{1}{\sqrt{\rho'^2 - \mu'^2}\sqrt{\rho'^2 - \nu'^2}}.$$

La portion infiniment petite ds' de la normale à l'élément $d\omega'$ de la surface E' au point m', comprise entre l'ellipsoïde (ρ') et l'ellipsoïde infiniment voisin $(\rho' + d\rho')$, a pour expression (2)

$$ds' = \frac{1}{l'} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Il en résulte pour la masse $\delta\, d\omega'\, ds'$ du cylindre droit élémentaire, ayant pour base $d\omega'$ et pour hauteur ds', la valeur suivante :

$$(13) \qquad \frac{\delta}{l'^2} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\, l'\, d\omega'.$$

Enfin, Δ désignant la distance du point m' au point extérieur attiré

(ρ, μ, ν), le potentiel du même cylindre infinitésimal est

$$\frac{\delta}{l'^2} \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \frac{l' d\omega'}{\Delta}.$$

Le potentiel dV de la couche hétérogène, infiniment mince, renfermée entre les ellipsoïdes homofocaux (ρ') et $(\rho' + d\rho')$, s'en déduit par une intégration effectuée tout le long de (ρ')

$$dV = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \int\int_{(\rho')} \frac{\delta}{l'^2} \frac{l' d\omega'}{\Delta}.$$

Remplaçant $\frac{\delta}{l'^2}$ par son développement (12),

$$dV = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{U}' \int\int_{(\rho')} \frac{l' M' N'}{\Delta} d\omega'.$$

Le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde d'intégration; nous avons rappelé que l'on a alors

$$\int\int \frac{l' M' N'}{\Delta} d\omega = 4\pi R' SMN,$$

en posant

$$S = R \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho'}{R'^2 \sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Ainsi

$$dV = 4\pi \sum SMN \frac{\mathcal{U}' R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On suppose $b < c$; ρ' est donc compris entre c et ρ_1. Une nouvelle intégration par rapport à ρ' conduit finalement à l'expression générale suivante du potentiel :

$$(14) \qquad V = 4\pi \sum SMN \int_{c}^{\rho_1} \frac{\mathcal{U}' R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

II.

L'intégrale $\int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$, qui entre dans V, peut recevoir une autre forme.

Étendons à tout l'ellipsoïde l'intégrale $\iiint R'M'N' dm'$, où dm' représente un élément de masse au point dont les coordonnées elliptiques sont ρ', μ', ν', et les coordonnées rectangulaires x', y', z'.

Nous venons de voir que l'on a (13)

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \frac{\delta}{l'^2} l' d\omega'.$$

Remplaçant $\frac{\delta}{l'^2}$ par son développement et intégrant, comme plus haut, d'abord le long de E', puis, en faisant varier ρ',

$$\iiint R'M'N' dm' = \int_c^{\rho_1} \frac{R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \int\int_{(\rho')} l' M'N' d\omega' \sum \mathcal{A}' M'N'.$$

On sait (6) et (7) que l'intégrale $\iint (M'N')_1 (M'N')_2 l' d\omega'$ est nulle, à moins que les produits $(M'N')_1$ et $(M'N')_2$ ne soient identiques. De plus, l'intégrale $\iint l'(M'N')^2 d\omega'$ est une constante qui ne dépend que de b et de c, puisque le produit $l' d\omega'$ est indépendant de ρ'. On peut donc écrire

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} &\iiint R'M'N' dm' \\ &= \iint l'(M'N')^2 d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \end{aligned} \right.$$

Telle est l'identité à laquelle nous voulions arriver.

La fonction $R'M'N'$ est un polynôme entier en $x'y'z'$; dm' peut être remplacé par $\delta\, dx'\, dy'\, dz'$, de sorte que l'on a

$$(16)\quad \begin{aligned} &\int\int\int R'M'N'\,\delta\, dx'\, dy'\, dz' \\ &= \int\int l'(M'N')^2\, d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'R'\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \end{aligned}$$

l'intégrale triple étant étendue à tout l'ellipsoïde E_1.

Nous ferons de suite l'application de cette formule au premier coefficient du développement de V pour lequel $R' = M' = N' = 1$. Notre identité devient, en appelant $\mathcal{A}'_0$ le premier coefficient du développement (12) de $\frac{\delta}{l'^2}$,

$$\int\int\int \delta\, dx'\, dy'\, dz' = \int\int l'\, d\omega' \times \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Le premier membre est la masse $\mathfrak{M}$ de l'ellipsoïde; quant à l'intégrale double qui figure dans le second membre, sa valeur est 4π. Il suffit, pour le voir, de se rappeler que $l'\, d\omega'$ est un élément de surface sphérique, de rayon 1, qui décrit toute la sphère lorsque l'élément $d\omega'$ parcourt tout l'ellipsoïde. Ainsi l'on a

$$(17)\qquad \mathfrak{M} = 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

ce qui montre que le premier coefficient du développement de V n'est autre que la masse totale. On pourrait encore arriver à ce résultat en formant ρV et cherchant la limite pour $\rho = \infty$, limite que l'on sait être la masse totale. On reconnaîtrait facilement que tous les termes du développement de ρV, à part le premier, s'évanouissent.

III. — Potentiel d'un ellipsoide homogène pour un point extérieur.

Nous commencerons par appliquer la formule générale du potentiel au cas de l'homogénéité. Tout d'abord il faut chercher le développement de $\frac{\delta}{l^2}$ en produits $M'N'$ ou, ici, puisque δ est constant, celui de $\frac{1}{l^2}$. Il y a cinq fonctions de Lamé, pour lesquelles le produit RMN est un polynôme du second degré en xyz (10), et parmi elles, les deux suivantes qui joueront, dans la suite, un rôle important :

$$(18)\quad \left\{\begin{array}{ll} R_1 = \rho^2 - h^2, & R_2 = \rho^2 - k^2. \\ \text{Les fonctions conjuguées sont} & \\ M_1 = \mu^2 - h^2, & M_2 = \mu^2 - k^2, \\ N_1 = \nu^2 - h^2, & N_2 = \nu^2 - k^2; \end{array}\right.$$

h^2 et k^2 sont les racines de l'équation du second degré

$$(18')\qquad 3\Lambda^2 - 2(b^2 + c^2)\Lambda + b^2c^2 = 0.$$

De là on déduit identiquement

$$\begin{aligned} \frac{1}{l'^2} &= (\rho'^2 - \mu'^2)(\rho'^2 - \nu'^2) \\ &= (R'_1 - M'_1)(R'_1 - N'_1) = (R'_2 - M_2)(R'_2 - N'_2); \end{aligned}$$

d'où

$$\frac{1}{l'^2} = R'^2_1 - R'_1(M'_1 + N'_1) + M'_1N'_1,$$

$$\frac{1}{l'^2} = R'^2_2 - R'_2(M'_2 + N'_2) + M'_2N_2.$$

Une combinaison bien simple de ces identités conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{l'^2}(R'_2 - R'_1) = {} & R'_1R'_2(R'_1 - R'_2) - R'_1R'_2[(M'_1 - M'_2) + (N'_1 - N'_2)] \\ & + R'_2M'_1N'_1 - R'_1M'_2N'_2 \end{aligned}$$

et, si l'on remarque que $R'_1 - R'_2 = M'_1 - M_2 = N'_1 - N'_2 = k^2 - h^2$,

$$(19) \qquad \frac{\delta}{l'^2} = R'_1 R'_2 + \frac{R'_2}{h^2 - k^2} M'_1 N'_1 + \frac{R'_1}{k^2 - h^2} M'_2 N'_2.$$

Ainsi, l'on peut mettre $\frac{\delta}{l'^2}$ sous la forme

$$\frac{\delta}{l'^2} = \mathcal{A}'_0 + \mathcal{A}'_1 M'_1 N'_1 + \mathcal{A}'_2 M'_2 N'_2.$$

Dans le cas actuel, la formule générale

$$V = 4\pi \sum SMN \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}' R' d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

se réduit donc à

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} V = \; & 4\pi S_0 M_0 N_0 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_0 R'_0 d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \text{où} \quad \mathcal{A}'_0 = \delta R'_1 R_2, \\ & + 4\pi S_1 M_1 N_1 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_1 R'_1 d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \mathcal{A}'_1 = \frac{\delta}{h^2 - k^2} R'_2, \\ & + 4\pi S_2 M_2 N_2 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathcal{A}'_2 R'_2 d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} && \mathcal{A}'_2 = \frac{\delta}{k^2 - h^2} R'_1; \end{aligned} \right.$$

en convenant d'affecter les fonctions S des mêmes indices que ceux des fonctions R dont elles dérivent et prenant $R_0 = M_0 = N_0 = 1$.

On peut encore écrire

$$V = \left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2} \right) 4\pi\delta \int_c^{\rho_1} \frac{R'_1 R'_2 d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

D'après une remarque faite à la fin du § II (17), le coefficient de S_0 doit se réduire à la masse. Ainsi

$$(20) \qquad V = \mathfrak{M} \left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2} \right).$$

Telle est l'expression du potentiel.

Il est d'ailleurs bien facile de voir directement que

$$\mathfrak{M} = 4\pi\delta \int_c^{\rho} \frac{R'_1 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a, en effet,

$$\frac{d}{d\rho'}\sqrt{\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)} = \frac{3\rho'^4 - 2(b^2 + c^2)\rho'^2 + b^2c^2}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}};$$

les racines du trinôme en ρ'^2, placé au numérateur du second membre, sont h^2 et k^2 (18'); on peut donc écrire

$$(21) \qquad \frac{d}{d\rho'}\sqrt{\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2)} = \frac{3R'_1 R'_2}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Cette identité conduit de suite à

$$\mathfrak{M} = 4\pi\delta \int_c^{\rho_1} \frac{R'_1 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

IV.

Il ne peut y avoir de doute au sujet de la coïncidence de la formule

$$V = \mathfrak{M}\left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2}\right)$$

avec la formule de Dirichlet que l'on établit dans la théorie de l'attraction. Cependant, il n'est pas inutile de montrer comment on peut passer de l'une à l'autre expression. On est ainsi conduit à des identités qui présentent un certain intérêt.

Nous aurons besoin, dans ce qui va suivre, des développements de x^2, y^2, z^2 en produits MN. Les coordonnées rectangulaires et les coor-

données elliptiques d'un point sont liées par les équations (1)

$$b^2c^2x^2 = \rho^2\mu^2\nu^2,$$

$$b^2(c^2-b^2)y^2 = (\rho^2-b^2)[-\mu^2\nu^2 + b^2(\mu^2+\nu^2) - b^4],$$

$$c^2(c^2-b^2)z^2 = (\rho^2-c^2)[\quad\mu^2\nu^2 - c^2(\mu^2+\nu^2) + c^4].$$

$\mu^2\nu^2$ et $\mu^2+\nu^2$ sont facilement exprimables en produits MN. On a, en effet (18),

$$M_1N_1 = (\mu^2-h^2)(\nu^2-h^2) = \mu^2\nu^2 - h^2(\mu^2+\nu^2) + h^4,$$

$$M_2N_2 = (\mu^2-k^2)(\nu^2-k^2) = \mu^2\nu^2 - k^2(\mu^2+\nu^2) + k^4.$$

On tire de ces identités

$$\mu^2+\nu^2 = 2\frac{b^2+c^2}{3} + \frac{M_2N_2 - M_1N_1}{h^2-k^2},$$

$$\mu^2\nu^2 = \frac{b^2c^2}{3} + \frac{h^2M_2N_2 - k^2M_1N_1}{h^2-k^2};$$

d'où

$$x^2 = \frac{\rho^2}{b^2c^2}\left(\frac{b^2c^2}{3} + \frac{k^2}{k^2-h^2}M_1N_1 + \frac{h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right).$$

$$y^2 = \frac{\rho^2-b^2}{b^2(c^2-b^2)}\left[\frac{b^2(c^2-b^2)}{3} + \frac{b^2-k^2}{k^2-h^2}M_1N_1 + \frac{b^2-h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right].$$

$$z^2 = \frac{\rho^2-c^2}{c^2(b^2-c^2)}\left[\frac{c^2(b^2-c^2)}{3} + \frac{c^2-k^2}{k^2-h^2}M_1N_1 + \frac{c^2-h^2}{h^2-k^2}M_2N_2\right].$$

Ces formules peuvent être simplifiées à l'aide des identités

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} b^2c^2 &= 3h^2k^2,\\ c^2(c^2-b^2) &= 3(c^2-h^2)(c^2-k^2),\\ b^2(b^2-c^2) &= 3(b^2-h^2)(b^2-k^2),\end{aligned}\right.$$

qui découlent de l'équation que vérifient h^2 et k^2. On trouve

$$(23)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\rho^2}{3} + \dfrac{\rho^2}{3h^2}\,\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2}{3k^2}\,\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}, \\ y^2 = \dfrac{\rho^2-b^2}{3} + \dfrac{\rho^2-b^2}{3(h^2-b^2)}\,\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2-b^2}{3(k^2-b^2)}\,\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}, \\ z^2 = \dfrac{\rho^2-c^2}{3} + \dfrac{\rho^2-c^2}{3(h^2-c^2)}\,\dfrac{M_1N_1}{k^2-h^2} + \dfrac{\rho^2-c^2}{3(k^2-c^2)}\,\dfrac{M_2N_2}{h^2-k^2}. \end{cases}$$

Nous aurons aussi à employer les sommes x^2+y^2, y^2+z^2, z^2+x^2. On les déduit des expressions précédentes, et on les simplifie à l'aide des relations que l'on obtient en éliminant successivement h^2 et k^2 entre la première des identités qui précèdent et les deux autres,

$$(24)\quad \begin{cases} h^2(h^2-b^2) = (c^2-h^2)(2h^2-b^2), \\ h^2(h^2-c^2) = (b^2-h^2)(2h^2-c^2), \\ k^2(k^2-b^2) = (c^2-k^2)(2k^2-b^2), \\ k^2(k^2-c^2) = (b^2-k^2)(2k^2-c^2). \end{cases}$$

On obtient

$$(25)\quad \begin{cases} x^2+y^2 = \dfrac{2\rho^2-b^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{c^2-h^2}{c^2-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{c^2-k^2}{c^2-k^2}+2\right), \\ x^2+z^2 = \dfrac{2\rho^2-c^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{b^2-h^2}{b^2-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{b^2-k^2}{b^2-k^2}+2\right), \\ y^2+z^2 = \dfrac{2\rho^2-b^2-c^2}{3} + \dfrac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left(\dfrac{\rho^2-h^2}{-h^2}+2\right) + \dfrac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left(\dfrac{\rho^2-k^2}{-k^2}+2\right). \end{cases}$$

Cela posé, les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde étant ρ_1^2, $\rho_1^2-b^2$, $\rho_1^2-c^2$, la formule de Dirichlet s'écrit

$$V = \frac{3}{4}\pi\int_{\rho^2-\rho_1^2}^{\infty} \frac{1-\dfrac{x^2}{\rho_1^2+s}-\dfrac{y^2}{\rho_1^2-b^2+s}-\dfrac{z^2}{\rho_1^2-c^2+s}}{\sqrt{(\rho_1^2+s)(\rho_1^2-b^2+s)(\rho_1^2-c^2+s)}}\,ds$$

ou, en posant $t^2 = \rho_1^2+s$ et prenant t pour variable,

$$(26)\qquad V = \frac{3}{2}\pi\int_{\rho}^{\infty} \frac{1-\dfrac{x^2}{t^2}-\dfrac{y^2}{t^2-b^2}-\dfrac{z^2}{t^2-c^2}}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\,dt.$$

Exprimant x^2, y^2, z^2 en produits MN

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\frac{V}{\mathfrak{M}} = &\int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} - \frac{\rho^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{\rho^2-b^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{\rho^2-c^2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\left[\frac{\rho^2}{k^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right. \\
&\qquad + \frac{\rho^2-b^2}{k^2-b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&\qquad \left. + \frac{\rho^2-c^2}{k^2-c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right] \\
&- \frac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\left[\frac{\rho^2}{h^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right. \\
&\qquad + \frac{\rho^2-b^2}{h^2-b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&\qquad \left. + \frac{\rho^2-c^2}{h^2-c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}\right].
\end{aligned}$$

Il faut montrer l'identité du second membre avec le second membre de

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3}\frac{V}{\mathfrak{M}} = &\frac{2}{3}\int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{M_2N_2}{3(h^2-k^2)}\,2(\rho^2-k^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-k^2)^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}} \\
&- \frac{M_1N_1}{3(k^2-h^2)}\,2(\rho^2-h^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-h^2)^2\sqrt{t^2-b^2}\sqrt{t^2-c^2}}.
\end{aligned}$$

Comparons d'abord les termes où M_1N_1 et M_2N_2 n'entrent pas. Leur différence est, au facteur $\frac{1}{3}$ près,

$$\int_\rho^\infty \frac{dt}{T_{(t)}} - \rho^2\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2T_{(t)}} - (\rho^2-b^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-b^2)T_{(t)}} - (\rho^2-c^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2-c^2)T_{(t)}},$$

en posant

$$T_{(t)} = \sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}.$$

Elle est nulle pour $\rho = \infty$. Pour prouver qu'elle est toujours nulle, il suffit de prouver qu'elle est constante ou que sa dérivée par rapport à ρ est nulle.

Cette dérivée est

$$\frac{2}{T_{(\rho)}} - 2\rho\left[\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2 T_{(t)}} + \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2) T_{(t)}} + \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2) T_{(t)}}\right].$$

Cette fonction est nulle pour $\rho = \infty$. Pour prouver qu'elle est nulle, il suffit de montrer que la dérivée de

$$\frac{1}{\rho T_{(\rho)}} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2 T} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2) T} - \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2) T}$$

est nulle. Or on arrive, tout calcul fait, à

$$-\frac{1}{T_{(\rho)}}\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\rho^2 - b^2} + \frac{1}{\rho^2 - c^2}\right) + \frac{1}{\rho^2 T_{(\rho)}} + \frac{1}{(\rho^2 - b^2) T_{(\rho)}} + \frac{1}{(\rho^2 - c^2) T_{(\rho)}},$$

expression qui est nulle identiquement.

L'identité des coefficients de $M_1 N_1$ et de $M_2 N_2$ se prouverait d'une manière toute semblable, en ayant égard à l'équation qui définit les quantités h^2 et k^2. Ces identités

$$(27)\quad \left\{\begin{aligned}
&2(\rho^2 - k^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - k^2)^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\quad = \frac{\rho^2}{k^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} + \frac{\rho^2 - b^2}{k^2 - b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\qquad\qquad + \frac{\rho^2 - c^2}{k^2 - c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}}, \\
&2(\rho^2 - h^2)\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - h^2)^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\quad = \frac{\rho^2}{h^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} + \frac{\rho^2 - b^2}{h^2 - b^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - b^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}} \\
&\qquad\qquad + \frac{\rho^2 - c^2}{h^2 - c^2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t^2 - c^2)\sqrt{t^2 - b^2}\sqrt{t^2 - c^2}},
\end{aligned}\right.$$

expriment les fonctions S_1 et S_2 à l'aide d'intégrales qui ne contiennent pas h^2 et k^2 sous le signe $\int$.

V.

Le potentiel d'un ellipsoïde homogène a pour valeur, pour les points extérieurs,

$$V = \partial\pi \left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2} \right).$$

D'un autre côté, la formule générale du potentiel d'un ellipsoïde pour les points extérieurs peut s'écrire, comme nous l'avons vu (14 et 16),

$$V = 4\pi \sum SMN \frac{\int\int\int \delta R' M' N' \, dx' \, dy' \, dz'}{\int\int U' (M' N')^2 \, d\omega'},$$

où l'intégrale triple est étendue à tout l'ellipsoïde. Dans le cas actuel, δ est constant et peut être chassé du signe $\int\int\int$. La comparaison de ces deux formules montre que tous les polynômes de Lamé $R' M' N'$ en $x' y' z'$ sont tels que

$$\int\int\int R' M' N' \, dx' \, dy' \, dz' = 0,$$

sauf

$$R_0 M_0 N_0 = 1,$$

$$\left.\begin{matrix} R'_1 M'_1 N'_1 \\ R'_2 M'_2 N'_2 \end{matrix}\right\} \text{deux des cinq polynômes du second degré.}$$

VI. — Moments d'inertie.

Désignons par A, B, C les moments d'inertie de l'ellipsoïde par rapport à ses axes, et considérons le cylindre infinitésimal droit dont nous avons parlé en établissant la formule du potentiel. Sa masse dm'

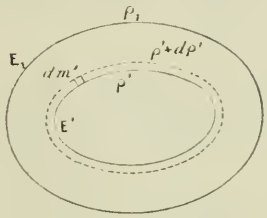
(*fig.* 2) a été trouvée égale à (13)

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \frac{\delta}{l'^2} l' \, d\omega'$$

ou bien à

$$dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{A}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' l' \, d\omega'.$$

Fig. 2.



Le moment d'inertie de cette masse élémentaire par rapport à ox est, en employant une expression donnée plus haut (25),

$$(y^2 + z^2)\, dm' = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathcal{A}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' l' \, d\omega'$$
$$\times \left[\frac{2\rho'^2 - (b^2 + c^2)}{3} + \frac{1}{3(k^2 - h^2)} \left(\frac{\rho'^2 - h^2}{-h^2} + 2 \right) \mathrm{M}'_1 \mathrm{N}'_1 \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3(h^2 - k^2)} \left(\frac{\rho'^2 - k^2}{-k^2} + 2 \right) \mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2 \right].$$

Intégrant le long de l'ellipsoïde (ρ') et remarquant que l'intégrale $\int\int l' (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_1 (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_2 \, d\omega'$ est nulle tant que $(\mathrm{M}'\mathrm{N}')_1 \gtrless (\mathrm{M}'\mathrm{N}')_2$, on arrive à

$$d\mathrm{A} = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \left[\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{3} \mathcal{A}'_0 \int\int l' \, d\omega' \right.$$
$$+ \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)} \left(\frac{\rho'^2 - h^2}{-h^2} + 2 \right) \int\int l' (\mathrm{M}'_1 \mathrm{N}'_1)^2 \, d\omega'$$
$$\left. + \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)} \left(\frac{\rho'^2 - k^2}{-k^2} + 2 \right) \int\int l' (\mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2)^2 \, d\omega' \right].$$

Un raisonnement analogue conduirait pour $d\mathrm{B}$ et $d\mathrm{C}$ aux expressions

$$d\mathrm{B} = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\Bigg[\frac{2\rho'^2 - c^2}{3}\mathcal{A}'_0 \int\int l'\,d\omega'$$
$$+ \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{b^2 - h^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega'$$
$$+ \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{b^2 - k^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\Bigg],$$

$$d\mathrm{C} = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\Bigg[\frac{2\rho'^2 - b^2}{3}\mathcal{A}'_0 \int\int l'\,d\omega'$$
$$+ \frac{\mathcal{A}'_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{c^2 - h^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega'$$
$$+ \frac{\mathcal{A}'_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{c^2 - k^2} + 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\Bigg].$$

Une nouvelle intégration par rapport à ρ' entre les limites c et ρ_1 donnerait A, B, C.

Ces formules renferment les intégrales $\int\int l'\,d\omega'$, $\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega'$, $\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'$ qui sont de simples fonctions de b et c. La première même se réduit à 4π, comme nous l'avons déja vu. La valeur de ces trois intégrales peut s'obtenir en appliquant la formule qui donne $d\mathrm{A}$ au cas de l'homogénéité.

Nous avons trouvé, dans le cas de l'ellipsoïde homogène (19'),

$$\mathcal{A}'_0 = \delta\,\mathrm{R}'_1\mathrm{R}'_2, \qquad \mathcal{A}'_1 = \delta\frac{\mathrm{R}'_2}{h^2 - k^2}, \qquad \mathcal{A}'_2 = \delta\frac{\mathrm{R}'_1}{k^2 - h^2}.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\delta}\,d\mathrm{A} = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\Bigg[\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{3}(\rho'^2 - h^2)(\rho'^2 - k^2)\int\int l'\,d\omega'$$
$$+ \frac{1}{3(h^2 - k^2)^2}(\rho'^2 - k^2)\left(\frac{\rho'^2 - h^2}{h^2} - 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_1\mathrm{N}'_1)^2\,d\omega'$$
$$+ \frac{1}{3(h^2 - k^2)^2}(\rho'^2 - h^2)\left(\frac{\rho'^2 - k^2}{k^2} - 2\right)\int\int l'(\mathrm{M}'_2\mathrm{N}'_2)^2\,d\omega'\Bigg].$$

D'ailleurs la formule bien connue du moment d'inertie d'un ellipsoïde homogène donne pour le moment d'inertie A′ de l'ellipsoïde (ρ')

$$\frac{A'}{\delta} = \frac{4}{3}\pi\rho'\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}\,\frac{2\rho'^2 - b^2 - c^2}{5},$$

puis, en différentiant,

$$\frac{1}{\delta}\,dA = \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \times 4\pi\,\frac{4\rho'^2(\rho'^2 - b^2)(\rho'^2 - c^2) + 3(2\rho'^2 - b^2 - c^2)(\rho'^2 - h^2)(\rho'^2 - k^2)}{15}.$$

Les polynômes du troisième degré en ρ'^2 qui entrent dans ces deux expressions de dA devant être identiques, on est conduit à égaler les coefficients des mêmes puissances de ρ'^2.

L'identification des termes en ρ'^6 donne de suite

$$\iint l'\,d\omega' = 4\pi. \tag{28}$$

Puis, en posant

$$L_1 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\iint l'(M'_1N'_1)^2\,d\omega'}{h^2(h^2 - k^2)^2}, \qquad L_2 = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\iint l'(M'_2N'_2)^2\,d\omega'}{k^2(h^2 - k^2)^2},$$

on doit avoir identiquement

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{15}(b^2 + c^2)\rho'^4 - \tfrac{4}{15}(b^4 + c^4)\rho'^2 + \tfrac{2}{15}b^2c^2(b^2 + c^2)\\ &\quad = (\rho'^2 - 3h^2)(\rho'^2 - k^2)L_1 + (\rho'^2 - 3k^2)(\rho'^2 - h^2)L_2,\end{aligned}$$

ce qui nécessite

$$\tfrac{2}{15}(b^2 + c^2) = L_1 + L_2,$$
$$\tfrac{4}{15}(b^4 + c^4) = (3h^2 + k^2)L_1 + (3k^2 + h^2)L_2,$$

ou bien

$$\tfrac{4}{5}(h^2 + k^2) = L_1 + L_2,$$
$$\frac{3(h^2 + k^2)^2 - 8h^2k^2}{5} = (3h^2 + k^2)L_1 + (3k^2 + h^2)L_2.$$

On en tire

$$L_1 = \frac{h^2(h^2 - 3k^2)}{5(h^2 - k^2)}, \qquad L_2 = \frac{k^2(k^2 - 3h^2)}{5(k^2 - h^2)},$$

d'où

$$(29)\quad \begin{cases} \int\int l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} h^4 (h^2 - k^2)(h^2 - 3k^2), \\ \int\int l'(M'_2 N'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} k^4 (k^2 - h^2)(k^2 - 3h^2). \end{cases}$$

Tel est le résultat auquel nous nous proposions de parvenir.

Les différences $C - A$, $B - A$, $C - B$ des moments d'inertie s'obtiennent sans peine à l'aide des formules données plus haut

$$(30)\quad \begin{cases} C - A = \frac{c^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi \frac{h^2(3k^2 - h^2)(c^2 - k^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ \qquad + 4\pi \frac{k^2(3h^2 - k^2)(c^2 - h^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_2 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \\ B - A = \frac{b^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi \frac{h^2(3k^2 - h^2)(b^2 - k^2)}{5(b^2 - c^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ \qquad + 4\pi \frac{k^2(3h^2 - k^2)(b^2 - h^2)}{5(b^2 - c^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_2 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \\ C - B = \frac{c^2 - b^2}{3}\,\mathfrak{M} + 4\pi \frac{h^2(3k^2 - h^2)(b^2 + c^2 - 2k^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ \qquad + 4\pi \frac{k^2(3h^2 - k^2)(b^2 + c^2 - 2h^2)}{5(c^2 - b^2)} \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_2 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \end{cases}$$

Il est important d'observer que les intégrales

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\lambda'_2 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

entrent dans le développement du potentiel comme coefficients respectifs de $S_1 M_1 N_1$, $S_2 M_2 N_2$.

VII. — Ellipsoïde animé d'un mouvement de rotation dont la surface est de niveau.

Imaginons une masse hétérogène composée d'une partie centrale solide, de forme quelconque, dont la constitution physique est inconnue, complètement immergée au sein d'un fluide limité extérieurement par un ellipsoïde. Supposons que, sous l'influence d'un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe de cet ellipsoïde, la surface libre soit de niveau et proposons-nous de trouver les conditions d'équilibre. V étant le potentiel attractif de l'ellipsoïde, r la distance d'un point de la surface à l'axe de rotation et f la constante de l'attraction, on doit avoir pour tout point de la surface

$$fV + \frac{\omega^2}{2} r^2 = \text{const.},$$

r^2 représentant $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $x^2 + z^2$ suivant l'axe autour duquel tourne le système. Il en résulte que sur la surface la fonction V doit se réduire identiquement à une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2. Le potentiel V, dont l'expression générale est

$$V = 4\pi \sum SMN \int_c^{\rho_1} \frac{M' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

ne doit donc contenir que les fonctions SMN qui se réduisent soit à une constante, soit à des polynômes linéaires en x^2, y^2, z^2 sur la surface. Or on sait qu'il n'y a que trois produits SMN jouissant de ces propriétés (10) : ce sont [1]

$$S_0 M_0 N_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2,$$

---

[1] On peut écrire, pour plus de clarté, $SMN = \frac{S}{R}(RMN)$; $\frac{S}{R}$ se réduit à une constante sur la surface, puisque ρ est constant. Ainsi les produits de SMN et RMN ne diffèrent que par un facteur constant.

dont nous avons déjà parlé dans ce Chapitre (18), (19'). Ainsi

$$(31)\quad \begin{cases} V = \mathfrak{M} S_0 + S_1 M_1 N_1 4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ \qquad + S_2 M_2 N_2 4\pi \displaystyle\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}. \end{cases}$$

Tous les autres produits SMN devant disparaître dans le développement, leur coefficient est nul

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \equiv 0$$

ou, à cause de l'identité (15),

$$\iiint R'M'N' \, dm' = \iint l'(M'N')^2 \, d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

$$\iiint R'M'N' \, dm' = 0.$$

Tous les polynômes R'M'N', à part le polynôme de degré 0 et les deux polynômes du second degré $R'_1 M'_1 N'_1$, $R'_2 M'_2 N'_2$, doivent vérifier cette relation.

Les trois polynômes du premier degré sont, à un facteur constant près, x, y, z. On a donc (10)

$$(32)\quad \iiint x' \, dm' = 0, \qquad \iiint y' \, dm' = 0, \qquad \iiint z' \, dm' = 0.$$

ce qui exprime que le centre de gravité se confond avec le centre de l'ellipsoïde.

Il y a cinq polynômes du second degré. Trois de ces polynômes doivent annuler $\iiint R'M'N' \, dm'$: ce sont xy, xz, yz, à des facteurs constants près (10),

$$(33)\quad \iiint x'y' \, dm' = 0, \qquad \iiint y'z' \, dm' = 0, \qquad \iiint z'x' \, dm' = 0.$$

Les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité coïncident avec les axes de l'ellipsoïde.

Ainsi le centre de gravité et la direction des axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité restent invariables dans toutes les dispositions possibles des masses internes [1].

VIII.

La fonction $fV + \frac{\omega^2}{2} r^2$, développée en produits MN, possède trois termes. Un terme constant, un terme en $M_1 N_1$ et un terme en $M_2 N_2$. Les coefficients de ces deux derniers doivent être nuls, s'il y a équilibre, pour tous les points de la surface, c'est-à-dire pour $\rho = \rho_1$. On arrive, en employant les développements qui ont été donnés (25) et (31), aux équations suivantes

$$8\pi f \delta_1 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\,(\rho_1^2 - h^2)\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{(\rho'^2 - h^2)^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

$$= \begin{cases} \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{c^2 - h^2} + 2\right) & \text{si } oz \text{ est l'axe de rotation,} \\ \omega_2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{b^2 - h^2} + 2\right) & oy \quad \text{»} \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - h^2}{-h^2} + 2\right) & ox \quad \text{»} \end{cases}$$

$$8\pi f \delta_2 \rho_1 \sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\,(\rho_1^2 - k^2)\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{(\rho'^2 - k^2)^2\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

$$= \begin{cases} \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{c^2 - k^2} + 2\right) & \text{si } oz \text{ est l'axe de rotation,} \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{b^2 - k^2} + 2\right) & oy \quad \text{»} \\ \omega^2\left(\dfrac{\rho_1^2 - k^2}{-k^2} + 2\right) & ox \quad \text{»} \end{cases}$$

---

[1] Ces propriétés ne s'appliquent pas seulement à l'ellipsoïde.

en posant

$$\delta_1 = \frac{(h^2 - k^2)\frac{4}{3}\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{A}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi\rho_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}},$$

$$\delta_2 = \frac{(k^2 - h^2)\frac{4}{3}\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{A}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi\rho_1\sqrt{\rho_1^2 - b^2}\sqrt{\rho_1^2 - c^2}}.$$

Lorsque les équations d'équilibre sont satisfaites, on peut en déduire la valeur de δ_1 et δ_2 en fonction de ρ_1, b, c et ω et partant celle des intégrales dont ces quantités dérivent. Le potentiel extérieur de l'ellipsoïde et les différences des moments d'inertie par rapport aux axes (30) et (31) peuvent ainsi s'exprimer à l'aide des données superficielles de l'ellipsoïde. En remarquant que les axes sont principaux d'inertie par rapport au centre de gravité, on est conduit à énoncer les théorèmes suivants :

Le potentiel extérieur d'un ellipsoïde dont la surface est de niveau sous l'influence d'un mouvement de rotation uniforme dépend uniquement des données superficielles (¹).

Les différences des moments d'inertie principaux relatifs au centre de gravité dépendent seulement des données superficielles.

Dans un ellipsoïde homogène ou composé de couches homofocales homogènes, $\delta_1 = \delta_2 =$ la densité moyenne de l'ellipsoïde, parce qu'à l'intérieur de chaque couche (19') $\mathfrak{A}'_1 = \frac{R'_2}{h^2 - k^2} \times$ densité de la couche, $\mathfrak{A}'_2 = \frac{R'_1}{k^2 - h^2} \times$ densité de la couche [*voir* (21)]. Il en résulte que les équations d'équilibre ne doivent pas, dans cette hypothèse, être différentes de celles qui se présentent dans la discussion de l'ellipsoïde de

(¹) Ce théorème remarquable est général. M. Stockes l'a démontré pour une surface quelconque (*Cambridge and Dublin mathematical Journal*, 1849). On en trouvera une belle démonstration de M. Poincaré dans un important Mémoire de M. Callandreau [*Sur la théorie de la figure des planètes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX)].

Jacobi. Au surplus, on pourrait les transformer de manière à les ramener à la forme ordinaire, en faisant disparaître les quantités h^2 et k^2. Ce calcul se ferait aisément en partant de la somme et de la différence des équations d'équilibre après avoir remplacé S_1 et S_2 par les expressions données plus haut (27). Il faudrait, en outre, recourir aux formules (22) et (24).

Les résultats de la discussion de l'ellipsoïde de Jacobi sont les suivants [1] :

1° L'axe dirigé suivant l'axe de rotation est le plus petit :

2° $$\frac{c^2(c^2-b^2)}{(\rho^2-c^2)^2} > 1, \qquad \text{ce qui entraîne} \qquad \rho^2 < 2c^2;$$

3° $$0 < \frac{\omega^2}{2\pi f\delta} < 0,18709\ldots$$

Si $\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = 0,18709\ldots$, l'ellipsoïde devient de révolution.

Les conditions d'équilibre de la surface ne présentent pas de différence avec celles qui précèdent si l'on a, dans le cas de l'hétérogénéité, $\delta_1 = \delta_2 > 0$, ce qui entraîne

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{A}'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} + \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{A}'_2 R'_2\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = 0.$$

Les expressions (30) des moments d'inertie donnent alors

$$\frac{8}{15}\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{A}'_1 R'_1\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^3-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} = \frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{C-A}{c^2} = \frac{\mathfrak{M}}{3} - \frac{B-A}{b^2} > 0.$$

---

[1] *Journal de Liouville*, t. XVI.

CHAPITRE II.

ELLIPSOIDE DE RÉVOLUTION APLATI.

I.

Soit

$$\frac{x^2+y^2}{\rho_1^2}+\frac{z^2}{\rho_1^2-c^2}=1$$

l'équation de la surface. Nous représenterons, comme plus haut, $\frac{\delta}{l'^2}$ par une série

$$(34)\qquad \frac{\delta}{l'^2}=\sum \mathfrak{B}'M'N' \quad (^1),$$

où $\mathfrak{B}'$ ne dépend que de ρ', en posant (3)

$$l'=\frac{1}{\rho'\sqrt{\rho'^2-\mu'^2}}.$$

L'expression du potentiel extérieur s'obtiendrait comme pour l'ellipsoïde à trois axes. On a

$$(34')\qquad V=4\pi\sum SMN\int_c^{\rho_1}\frac{\mathfrak{B}'R'\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}},$$

en posant

$$S=R\int_\rho^\infty\frac{d\rho'}{R'^2\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}}.$$

On démontrerait, comme dans le cas général (15), l'identité

$$(35)\qquad \iiint R'M'N'\,dm'=\iint l'(M'N')^2\,d\omega'\int_c^{\rho_1}\frac{\mathfrak{B}'R'\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2-c^2}}.$$

---

(1) *Voir* le § III de l'Introduction.

Aux fonctions R_1, M_1, N_1, R_2, M_2, N_2 relatives à l'ellipsoïde à trois axes correspondent ici (10), (11), (18),

$$(36)\qquad \begin{cases} R_1 = \rho^2 - \dfrac{2c^2}{3}, & R_2 = \rho^2, \\ M_1 = \mu^2 - \dfrac{2c^2}{3}, & M_2 = \mu^2, \\ N_1 = 1, & N_2 = \nu_1^2 - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On a donné, dans les préliminaires (8),

$$\rho^2\mu^2 = c^2(x^2 + y^2),$$

et, comme on a identiquement

$$M_1 N_1 = \mu^2 - \frac{2c^2}{3},$$

$$\rho^2\mu^2 = \tfrac{2}{3}\rho^2 c^2 + \rho^2 M_1 N_1,$$

on en déduit

$$(37)\qquad x^2 + y^2 = \tfrac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} M_1 N_1.$$

Lorsque $b^2 > 0$ (29),

$$\iint l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} h^4 (h^2 - k^2)(h^2 - 3k^2),$$

$$\iint l'(M'_2 N'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5} k^4 (k^2 - h^2)(k^2 - 3h^2),$$

$$\iint l'\, d\omega' = 4\pi,$$

et alors

$$h^2 = \frac{2c^2}{3} + \text{des termes contenant en facteur } b^2.$$

$$k^2 = \frac{b^2}{2} + \qquad \text{»} \qquad b^4.$$

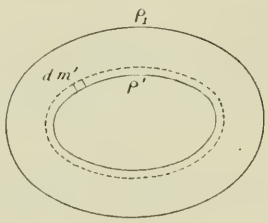
En se reportant à ce qui a été dit relativement au passage des fonc-

tions générales N à celles qui leur correspondent dans l'ellipsoïde de révolution aplati, et tenant compte des facteurs constants qui ont été supprimés (11), on arrive sans peine à

$$(38)\qquad \left\{\begin{aligned} &\int\int l'(M'_1 N'_1)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2,\\ &\int\int l'(M'_2 N'_2)^2\, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\,\frac{c^4}{3},\\ &\int\int l'\, d\omega' = 4\pi. \end{aligned}\right.$$

Le calcul des moments d'inertie se fait comme pour les ellipsoïdes à trois axes.

Fig. 3.



Le cylindre infinitésimal déjà considéré a pour masse (13),

$$dm' = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathfrak{B}' M' N' l'\, d\omega',$$

et (37),

$$(x^2 + y^2)\, dm' = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \left(\frac{2}{3}\rho'^2 + \frac{\rho'^2}{c^2} M'_1 N'_1\right) \mathfrak{B}' M' N' l'\, d\omega'.$$

Le moment d'inertie dC de la courbe infiniment mince homofocale s'en déduit par une double intégration effectuée le long de l'ellipsoïde (ρ') (6) et (7). En représentant par $\mathfrak{B}'_0$ le coefficient de $M'_0 N'_0 = 1$, $\mathfrak{B}'_1$ celui de $M'_1 N'_1$, $\mathfrak{B}'_2$ celui de $M'_2 N'_2$ dans le développement de la den-

sité (34), on a

$$dC = \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\left[\frac{8}{3}\pi\rho'^2\mathfrak{B}'_0 + \frac{\rho'^2}{c^2}\mathfrak{B}'_1\int\int l'(M'_1N'_1)^2\,d\omega'\right],$$

$$C = \frac{8}{3}\pi\int_c^{\rho_1}\rho'^2\frac{\mathfrak{B}'_0\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} + \frac{1}{c^2}\int_c^{\rho_1}\rho'^2\frac{\mathfrak{B}'_1\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\int\int l'(M'_1N'_1)^2\,d\omega'.$$

Introduisons dans cette formule la densité moyenne de la couche infiniment mince.

Sa masse est $\int\int_{\rho'} dm' = \frac{4\pi\mathfrak{B}'_0\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$ (7), et son volume

$$\frac{4}{3}\pi\,d\rho'^2\sqrt{\rho'^2 - c^2} = \frac{4}{3}\pi\frac{3\rho'^2 - 2c^2\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\,d\rho'.$$

La densité moyenne η' a donc pour valeur

$$\eta' = \frac{\mathfrak{B}'_0}{\rho'^2\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)}, \qquad \mathfrak{B}'_0 = \rho'^2\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\eta'.$$

Le premier terme de C devient

$$\frac{8}{3}\pi\int_c^{\rho_1}\eta'\frac{\rho'^3\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)}{\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\,d\rho'$$

ou

$$\frac{8}{9}\pi\int_c^{\rho_1}\eta'\rho'^2\,d\rho'^2\sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

On peut écrire la seconde intégrale entrant dans C,

$$\frac{1}{c^2}\int_c^{\rho_1}\frac{\rho'^2}{R'_1}\,d\int_c^{\rho'}\frac{R'_1\mathfrak{B}'_1\,d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\times\int\int l'(M'_1N'_1)^2\,d\omega'.$$

L'intégrale $\int\int\int R'_1M'_1N'_1\,dm'$, étendue à tout l'ellipsoïde (ρ), a

pour valeur (35)

$$\iiint_{\rho'} R'_1 M'_1 N'_1 \, dm' = \iint l'(M'_1 N'_1)^2 \, d\omega' \int_c^{\rho} \frac{R'_1 \mathfrak{M}'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a vu (11) que

$$R'_1 M'_1 N'_1 = \frac{c^2}{3}\left(x'^2 + y'^2 - 2z'^2 - \frac{2c^2}{3}\right);$$

donc, en désignant par A′, B′, C′ les moments d'inertie de l'ellipsoïde (ρ') par rapport à ses axes, et par $\mathfrak{M}'$ sa masse,

$$\iiint_{\rho'} R'_1 M'_1 N'_1 \, dm' = \frac{c^2}{3}\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right).$$

Il en résulte que l'intégrale dont nous nous occupons peut se mettre sous la forme

$$\frac{1}{3}\int_c^{\rho_1} \frac{\rho'^2}{\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}} \frac{d}{d\rho'}\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right) d\rho'.$$

Ainsi l'on a

$$C = \tfrac{8}{9}\pi \int_c^{\rho_1} \eta' \rho'^2 \, d\rho'^2 \sqrt{\rho'^2 - c^2}$$
$$+ \frac{1}{3}\int_c^{\rho_1} \frac{\rho'^2}{\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}} d\left(2C' - A' - B' - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}'\right).$$

A cette expression, il faut joindre l'expression de la masse totale

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi \int_c^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^2 \sqrt{\rho'^2 - c^2}.$$

Supposons qu'il s'agisse d'une sphère. Alors $c = 0$,

$$C = \tfrac{8}{9}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \rho'^2 \, d\rho'^3 + \frac{1}{3}\int_0^{\rho_1} d(2C' - A' - B')$$

ou bien

$$(39)\quad \begin{cases} C = \frac{8}{15}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^5 + \frac{1}{3}(2C - A - B) \\ \text{et} \\ \mathfrak{M} = \frac{4}{3}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^3, \end{cases}$$

où η' est la densité moyenne de la couche infiniment mince comprise entre les deux sphères concentriques de rayon ρ', $\rho' + d\rho'$.

La première formule (39), qui équivaut à

$$A + B + C = \frac{8}{5}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' \, d\rho'^5,$$

peut s'établir d'une façon élémentaire. On a, en effet, pour une couche sphérique infiniment mince quelconque

$$\begin{aligned} d(A + B + C) &= 2\sum (x'^2 + y'^2 + z'^2)\, dm' \\ &= 2\rho'^2 \times \text{masse de la couche} = 8\pi\eta'\rho'^4 \, d\rho'. \end{aligned}$$

En intégrant, on tombe sur la formule à démontrer.

II. — Ellipsoïde de révolution aplati animé d'un mouvement de rotation dont la surface est de niveau.

Considérons une masse hétérogène en équilibre, composée d'une partie centrale quelconque recouverte entièrement par un liquide limité extérieurement par un ellipsoïde de révolution autour de son petit axe oz, et tournant uniformément autour de cet axe.

La fonction $fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2)$ doit se réduire à une constante sur l'ellipsoïde. En développant le potentiel en produit MN

$$V = 4\pi \sum SMN \int_c^{\rho_1} \frac{MS' R' \, dz'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

on verrait, par un raisonnement semblable à celui qui a été fait au sujet de l'ellipsoïde à trois axes, que le développement contient au plus trois termes,

$$S_0 M_0 N_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2;$$

tous les autres ont un coefficient nul

$$(40) \qquad \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' R' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0.$$

Il en résulte que le centre de gravité coïncide avec le centre de l'ellipsoïde, et que les axes sont principaux d'inertie relativement au centre de gravité [1].

La fonction qui doit se réduire à une constante pour $\rho = \rho_1$ est donc (37)

$$f \mathfrak{M} S_0 + f S_1 M_1 N_1 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$
$$+ f S_2 M_2 N_2 4\pi \int_0^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} + \frac{\omega^2}{2}\left(\frac{2}{3}\rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} M_1 N_1\right).$$

Égalant à zéro les coefficients de $M_2 N_2$ et de $M_1 N_1$ et faisant $\rho = \rho_1$ dans ces coefficients, on a

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0,$$

$$\frac{\omega^2}{2f} \frac{\rho_1^2}{c^2} + (S_1)_{\rho_1} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0.$$

On a identiquement (35)

$$\int\int\int_{\rho_1} (R'_2 M'_2 N'_2) \, dm' = \int\int l'(M'_2 N'_2)^2 \, dm' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

---

[1] Pour discuter plus complètement l'équation (40) qui équivaut, à cause de l'identité (35), à $\int\int\int R' M' N' \, dm' = 0$, il y aurait à faire usage des expressions de R, M, N données dans le § III de l'Introduction.

et (11)

$$R'_2 M'_2 N'_2 = \frac{c^2}{2}(x'^2 - y'^2);$$

donc

$$(41) \qquad \iiint R'_2 M'_2 N'_2 \, dm' = \frac{c^2}{2}(B - A) = 0.$$

Les moments d'inertie principaux équatoriaux sont égaux.

Posons

$$(42) \qquad \delta = -\frac{4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi \rho_1^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2}}$$

et remplaçons $(S_1)_{\rho_1}$ par sa valeur

$$\left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right) \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

L'équation d'équilibre devient

$$(43) \quad \frac{\omega^2}{2\pi f \delta} = \frac{4}{3} c^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2} \left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right) \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Il suffit de poser $\rho'^2 - c^2 = u^2$ pour ramener la fonction à intégrer à la forme rationnelle. Les calculs faits, on a

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \delta} = -3\frac{\rho^2 - c^2}{c^2} + \frac{\sqrt{\rho^2 - c^2}(3\rho^2 - 2c^2)}{c^3} \operatorname{arc\,tang} \frac{c}{\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

et, en posant

$$\rho^2 = (\rho^2 - c^2)(1 + \lambda^2),$$

il vient

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \delta} = -\frac{3}{\lambda^2} + \frac{3 + \lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arc\,tang} \lambda.$$

C'est l'équation qui se présente dans la discussion de l'ellipsoïde de

révolution homogène. On en tire deux valeurs de λ tant que

$$0 < \frac{\omega^2}{2\pi f \delta} < 0,22467.$$

La quantité δ, qui se réduit à la densité lorsque l'ellipsoïde est homogène, peut être exprimée dans le cas général en fonction de la densité moyenne D et du rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$.

On a en effet identiquement (35)

$$\int\int\int_{(\rho_1)} R'_1 M'_1 N'_1 \, dm' = \int\int l'(M'_1 N'_1)^2 \, d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On a vu (11) que

$$R'_1 M'_1 N'_1 = \frac{c^2}{3}\left(x'^2 + y'^2 - 2z'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)$$

et (38)

$$\int\int l'(M'_1 N'_1)^2 \, d\omega' = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2.$$

On a donc identiquement

$$\frac{c^2}{3}\left(2C - A - B - \frac{2c^2}{3}\mathfrak{M}\right) = \frac{4\pi}{5}\left(\frac{2c^2}{3}\right)^2 \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}$$

et, comme $B = A$ (41), il en résulte

$$4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^3}} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{C-A}{\mathfrak{M}} - \frac{c^2}{3}\right)\mathfrak{M};$$

mais

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\, D.$$

par suite

$$(44) \qquad \delta = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right) D.$$

Ainsi l'équation d'équilibre peut s'écrire

$$\frac{\omega^2}{2\pi f D} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right)\left(-\frac{3}{\lambda^2} + \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arc\,tang}\lambda\right).$$

L'aplatissement de la surface ayant pour valeur

$$\varepsilon = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}},$$

on voit que le rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ peut s'exprimer en fonction seulement des données superficielles. Nous ferons plus loin l'application de cette formule aux ellipsoïdes peu aplatis.

Cherchons actuellement la valeur de la pesanteur superficielle. Il faut prendre la dérivée de la fonction $fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)$ suivant la normale à la surface

$$g = \frac{d}{ds}\left[fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right].$$

Or, pour passer du point (ρ_1, μ, ν), de l'ellipsoïde à un point infiniment voisin placé sur la normale à la surface en ce point, il faut seulement faire varier ρ_1 de $d\rho$, μ et ν gardant la même valeur. On peut donc écrire

$$g = \frac{d\rho}{ds}\frac{d}{d\rho}\left[fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right].$$

Il faudra faire $\rho = \rho_1$ après la dérivation.

Or on a, à cause de $A = B$,

$$\begin{aligned} &fV + \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2) \\ &\quad = \frac{\omega^2}{3}\rho^2 + f\mathfrak{M}S_0 + \left(\frac{\omega^2}{2}\frac{\rho^2}{c^2} - \tfrac{1}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2-c^2}\,fS_1\right)M_1N_1, \end{aligned}$$

de plus (2)

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{\sqrt{\rho^2-c^2}}{\sqrt{\rho^2-\mu^2}};$$

on en tire

$$(15)\quad \left\{ \begin{aligned} g = \frac{\sqrt{\rho_1^2-c^2}}{\sqrt{\rho_1^2-\mu^2}}\Bigg[&\tfrac{2}{3}\omega^2\rho + f\mathfrak{M}\frac{dS_1}{d\rho} \\ &+ \left(\omega^2\frac{\rho}{c^2} - \tfrac{1}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2-c^2}\,f\frac{dS_1}{d\rho}\right)M_1N_1\Bigg]_{\rho=\rho_1} \end{aligned} \right.$$

où S_0 et S_1 ont les valeurs suivantes :

$$S_0 = \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\rho\sqrt{\rho^2 - c^2}},$$

$$S_1 = \left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right) \int_\rho^\infty \frac{d\rho}{\left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2 \rho\sqrt{\rho^2 - c^2}}.$$

Nous ne développerons pas cette formule qui ne présente pas grand intérêt dans le cas général. Elle sera appliquée plus loin aux ellipsoïdes peu aplatis. Nous nous bornerons à faire remarquer que, l'équation d'équilibre de la surface donnant la valeur de δ en fonction de λ et ω, on peut exprimer g en fonction des données superficielles. Il en est évidemment de même du potentiel extérieur [1]

$$V = \mathfrak{M} S_0 - \tfrac{4}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\, S_1 M_1 N_1. \tag{46}$$

III.

Les planètes sont limitées extérieurement par des ellipsoïdes de révolution peu aplatis animés d'un faible mouvement de rotation. En partant de ce fait expérimental, on peut établir, indépendamment de toute hypothèse sur leur constitution interne, quelques-unes des formules auxquelles conduit la théorie de Clairaut. Dans les approximations, nous considérerons, comme on le fait dans cette théorie, ω^2 et l'aplatissement ε comme des quantités du premier ordre.

L'équation de la surface étant

$$\frac{x^2 + y^2}{\rho_1^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c^2} = 1,$$

son aplatissement est

$$\varepsilon = \frac{\rho_1 - \sqrt{\rho_1^2 - c^2}}{\rho_1} = 1 - \sqrt{1 - \frac{c^2}{\rho_1^2}}.$$

---

[1] *Voir* la note de la page 102.

Si l'on considère ε comme une quantité du premier ordre, $\frac{c^2}{\rho_1^2}$ est du premier ordre, et l'on a, au second ordre près,

$$\frac{c^2}{\rho_1^2} = 2\varepsilon. \tag{17}$$

L'équation d'équilibre de la surface, donnée plus haut (13),

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \tfrac{4}{3}c^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\left(\rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}},$$

devient, en ne conservant dans le second membre que les termes du premier ordre,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{4}{3}c^2\rho_1^3\int_{\rho_1}^{\infty}\frac{d\rho'}{\rho'^6},$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{4}{15}\frac{c^2}{\rho_1^2};$$

d'où

$$\frac{\omega^2}{2\pi f\delta} = \frac{8}{15}\varepsilon. \tag{18}$$

Reprenons la formule de la pesanteur trouvée plus haut (15) et remplaçons-y $M_1 N_1$ par sa valeur en fonction de μ (36)

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[\tfrac{2}{3}\omega^2\rho + f\mathfrak{M}\frac{dS_0}{d\rho}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{\omega^2\rho}{c^2} - \tfrac{4}{3}\pi f\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\,\frac{dS_1}{d\rho}\right)\left(\mu^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\right]_{\rho=\rho_1}.$$

Les coordonnées rectangulaires x, y, z d'un point de la surface et la quantité μ^2 sont liées par l'équation $\frac{x^2+y^2}{\mu^2} + \frac{z^2}{\mu^2 - c^2} = 1$. Il en résulte que, le long d'un parallèle, la pesanteur est constante. La valeur de μ^2 tirée de l'équation qui précède est

$$\mu^2 = c^2\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2+z^2} + \text{des termes contenant } c^4 \text{ en facteur},$$

c'est-à-dire

$$\mu^2 = c^2\cos^2\psi + \ldots,$$

en désignant par ψ l'angle que fait le rayon de l'ellipsoïde aboutissant au point xyz de la surface avec l'équateur.

Proposons-nous d'obtenir g en négligeant les termes du second ordre.

$\mu^2 - \frac{2c^2}{3} = c^2\left(\cos^2\psi - \frac{2}{3}\right)$ est du premier ordre; on peut donc négliger les termes du premier ordre dans son coefficient et y remplacer

$$\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2} \quad \text{par} \quad \rho_1^3,$$

$$S_1 \quad \text{par} \quad \rho^2\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^6} = \frac{1}{5}\frac{1}{\rho^3},$$

$$\frac{dS_1}{d\rho} \quad \text{par} \quad -\frac{3}{5}\frac{1}{\rho^4};$$

de plus on peut faire, à cause de l'équation d'équilibre de la surface,

$$\frac{4}{3}\pi f\delta = \frac{5}{4}\frac{\omega^2}{\varepsilon}.$$

La formule

$$S_0 = \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = \int_\rho^\infty \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho'^4}\right)d\rho$$

donne, en négligeant les termes du second ordre,

$$\frac{dS_0}{d\rho} = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho^4}.$$

La valeur de g devient

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[-\frac{1}{\rho_1^2}f\mathfrak{M} + \frac{2}{3}\omega^2\rho_1 - \frac{f\mathfrak{M}}{2}\frac{c^2}{\rho_1^4}\right.$$
$$\left. + \left(\omega^2\rho_1 + \frac{3}{4}\frac{\omega^2\rho_1}{\varepsilon}\frac{c^2}{\rho_1^2}\right)\left(\cos^2\psi - \frac{2}{3}\right)\right];$$

puis, remplaçant $\frac{c^2}{\rho_1^2}$ par 2ε (47),

$$g = \sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}}\left[-\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2} - \frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\varepsilon + \left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\omega^2\rho_1\right].$$

On a d'ailleurs

$$\sqrt{\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2 - \mu^2}} = \left(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_1^2}\right)\left(1 + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho_1^2}\cos^2\psi\right) = 1 - \varepsilon\sin^2\psi + \ldots,$$

donc

$$g = \left[-\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2} - \frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\varepsilon\cos^2\psi + \left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\omega^2\rho_1\right].$$

Posons

$$(49)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi &= \frac{\omega^2\rho_1}{\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}} = \frac{\text{force centrifuge équatoriale}}{\text{attraction équatoriale}} \\ &= \frac{\text{force centrifuge équatoriale}}{\text{pesanteur équatoriale}} \\ &\quad + \text{termes du second ordre,} \end{aligned}\right.$$

il vient

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\left[1 + \varepsilon\cos^2\psi - \varphi\left(\frac{5}{2}\cos^2\psi - 1\right)\right]$$

ou bien

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}\left[1 + \varepsilon - \frac{3}{2}\varphi + \left(\frac{5\varphi}{2} - \varepsilon\right)\sin^2\psi\right].$$

$\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2}$ est l'attraction à l'équateur; on peut introduire l'attraction au pôle $\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2 - c^2}$. Il suffit de remplacer dans l'expression qui précède $\frac{1}{\rho_1^2}$ par

$$\frac{1}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_1^2 - c^2}\,\frac{\rho_1^2 - c^2}{\rho_1^2} = \frac{1}{\rho_1^2 - c^2}(1 - 2\varepsilon).$$

On obtient finalement.

$$g = -\frac{f\mathfrak{M}}{\rho_1^2 - c^2}\left[1 - \varepsilon - \frac{3}{2}\varphi + \left(\frac{5}{2}\varphi - \varepsilon\right)\sin^2\psi\right].$$

C'est la formule de Clairaut. L'angle ψ se confond avec la latitude dans le cas de la sphère où $\varepsilon = 0$. Ces deux angles diffèrent donc entre eux d'une quantité du premier ordre quand ε est petit. Ainsi, dans la

formule qui précède, on peut confondre l'angle ψ avec la latitude et énoncer ce résultat :

La pesanteur à la surface d'une planète varie proportionnellement au sinus carré de la latitude [1].

IV. — Valeur du rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$.

On a

$$\varphi = \frac{\omega^2 \rho_1}{f \frac{\mathfrak{M}}{\rho_1^2}}.$$

Introduisons la densité moyenne dans ce rapport en posant

$$\mathfrak{M} = \tfrac{4}{3}\pi D \rho_1^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2}.$$

Il vient, en négligeant les termes du second ordre,

$$\varphi = \frac{\omega^2}{\frac{4}{3}\pi f D}.$$

Remplaçant $\frac{\omega^2}{4\pi f}$ par sa valeur $\frac{4}{15}\varepsilon\delta$ (48), on en déduit

$$\delta = \frac{5}{4} D \frac{\varphi}{\varepsilon}. \tag{50}$$

On a vu, d'autre part, que δ peut s'exprimer, au moyen du rapport $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ (44),

$$\delta = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right) D.$$

On a donc

$$\frac{5}{4}\frac{\varphi}{\varepsilon} = \frac{15}{2c^2}\left(\frac{c^2}{3} - \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\right);$$

---

[1] Cette formule a été établie ici sans rien supposer sur la constitution interne de la planète. Ce résultat a été obtenu pour la première fois par Laplace, mais son analyse manque de rigueur.

d'où

$$\frac{C-A}{\mathfrak{M}} = \frac{c^2}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\rho}{\varepsilon}\right)$$

et, en remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ (47),

$$(51) \qquad \frac{C-A}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{3}\rho_1^2\left(\varepsilon - \frac{1}{2}\rho\right).$$

C'est la formule à laquelle conduit la théorie de Clairaut [1].

V. — Rapport $\frac{C-A}{C}$.

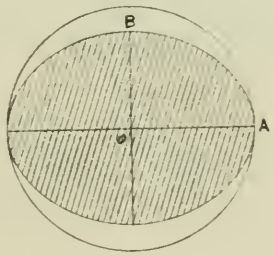
On a identiquement

$$\frac{C-A}{C} = \frac{C-A}{\mathfrak{M}}\,\frac{\mathfrak{M}}{C}.$$

Si l'on néglige les termes du second ordre, on peut faire abstraction des termes du premier ordre dans $\frac{\mathfrak{M}}{C}$, puisque $\frac{C-A}{\mathfrak{M}}$ est du premier ordre.

Circonscrivons une sphère à l'ellipsoïde (*fig.* 4), et considérons la

Fig. 4.



masse hétérogène renfermée à l'intérieur (y compris l'espace vide). Les moments d'inertie de la sphère sont les mêmes que ceux de l'ellip-

(1) *Voir* à ce sujet le premier Mémoire de M. Callandreau inséré dans le t. XIX des *Annales de l'Observatoire de Paris*.

soïde. D'après une formule donnée plus haut, on a, pour la sphère (39),

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{\frac{8}{15}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' d\rho'^5}{\frac{4}{3}\pi \int_0^{\rho_1} \eta' d\rho'^3} + \frac{1}{3}\,\frac{2C - A - B}{\mathfrak{M}},$$

et ici, comme $A = B$ (41),

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{5}\,\frac{\int_0^{\rho_1} \eta' d\rho'^5}{\int_0^{\rho_1} \eta' d\rho'^3} + \frac{2}{3}\,\frac{C - A}{\mathfrak{M}}.$$

Le second terme étant du premier ordre peut être négligé. Pour le même motif, au lieu de prendre le rayon équatorial pour limite supérieure des intégrales, on peut prendre le rayon polaire et écrire, en gardant les termes les plus importants,

$$\frac{C}{\mathfrak{M}} = \frac{2}{5}\rho_1^2\,\frac{\int_0^1 \eta' dt^5}{\int_0^1 \eta' dt^3} \text{ (1)},$$

où η' est la *densité moyenne* des matières comprises entre les deux sphères de rayons $t\sqrt{\rho_1^2 - c^2}$, $(t + dt)\sqrt{\rho_1^2 - c^2}$. On déduit de là

$$\frac{C - A}{C} = \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' dt^3}{\int_0^1 \eta' dt^5}.$$

---

(1) Cette formule conviendrait même si la surface libre de la planète n'était pas un ellipsoïde, pourvu qu'elle fût peu différente d'une sphère, et que $\frac{2C - A - B}{\mathfrak{M}}$ fût petit. Pour la Terre, en particulier, on sait par la théorie de la précession que $\frac{2C - A - B}{2C}$ est voisin de $\frac{1}{306}$.

Cette formule est semblable à celle où conduit la théorie de Clairaut.

Supposons que η' croisse constamment de la surface au centre, mais que la variation de cette densité n'augmente pas avec la profondeur; en d'autres termes $\frac{d\eta'}{d\rho'} < 0$, $\frac{d^2\eta'}{d\rho'^2} < 0$ (c'est ce qui aurait lieu, en particulier, si l'accroissement de la densité n'était dû qu'à la compression).

Pour passer d'une loi de densité soumise à ces restrictions au cas où la densité croîtrait proportionnellement à la profondeur, sans modifier la masse totale, il faudrait augmenter la densité des parties centrales au détriment de celle des couches élevées. Il est facile de voir que le moment d'inertie C diminuerait dans cette transformation.

Soient $m + \mu$ la masse d'une couche sphérique infiniment mince, homogène, de rayon R, m' celle d'une autre couche de rayon R', et $R > R'$. La somme des moments d'inertie de ces couches est

$$\tfrac{2}{3}[(m+\mu)R^2 + m'R'^2];$$

si l'on transporte la masse μ dans la couche (R'), la somme devient

$$\tfrac{2}{3}[mR^2 + (m'+\mu)R'^2],$$

expression dont la valeur est inférieure à la première.

Il résulte de là que, en supposant la densité proportionnelle à la profondeur, on obtiendra pour $\frac{C}{\mathfrak{M}}$ une valeur inférieure à la valeur réelle et, pour $\frac{C-A}{C}$, une valeur trop grande.

Posons $\eta' = \lambda - \mu t$. On en déduit

$$\int_0^1 \eta' \, dt^5 = \lambda - \tfrac{5}{6}\mu.$$

D'autre part, en désignant par θ la densité moyenne superficielle et par D la densité moyenne de la planète,

$$\int_0^1 \eta' \, dt^3 = D = \lambda - \tfrac{3}{4}\mu.$$

$$\theta = \lambda - \mu.$$

Ces équations donnent

$$\mu = 4(D - \theta), \qquad \lambda = \theta + 4(D - \theta), \qquad \lambda - \tfrac{5}{6}\mu = \theta + \tfrac{2}{3}(D - \theta):$$

il en résulte

$$\frac{\int_0^1 \eta' dt^3}{\int_0^1 \eta' dt^5} = \frac{3\frac{D}{\theta}}{1 + 2\frac{D}{\theta}}.$$

Ainsi, l'on doit avoir

$$\frac{C - A}{C} < \frac{5\frac{D}{\theta}}{1 + 2\frac{D}{\theta}}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Pour la Terre en particulier, on a

$$\varepsilon = \frac{1}{293,5}, \qquad \varepsilon' = \frac{1}{288,38}, \qquad \frac{D}{\theta} = 2.$$

donc

$$\frac{C - A}{C} < \frac{1}{298,5}.$$

La précession donne

$$\frac{C - A}{C} < \frac{1}{305,6}.$$

Si, au lieu de rapprocher les fortes densités du centre, on s'arrangeait de façon à rendre la masse homogène, on augmenterait le moment C. et l'on diminuerait $\frac{C - A}{C}$. On trouverait

$$\frac{C - A}{C} > \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}\right).$$

Pour la Terre,

$$\frac{C - A}{C} > \frac{1}{358}.$$

VI. — Limite inférieure de la densité au centre de la terre.

Nous avons trouvé

$$D = \int_0^1 \eta' dt^3 = \ldots = 3\int_0^1 \eta' t^2 dt$$

et

$$\frac{C-A}{C} = \frac{5}{3}\left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' dt^3}{\int_0^1 \eta' dt^5} = \left(\varepsilon - \frac{\varphi}{2}\right)\frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt}.$$

En prenant

$$D = 5,56, \qquad \varepsilon = \frac{1}{293,5}, \qquad \varphi = \frac{1}{288,38}, \qquad \frac{C-A}{C} = \frac{1}{305,6},$$

on tire de ces équations

$$\int_0^1 \eta' t^2 dt = 1,853, \qquad \frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt} = 1,954.$$
$$\int_0^1 \eta' t^4 dt = 0,9484,$$

La densité moyenne η' des matières comprises entre deux sphères infiniment voisines correspondant au paramètre t joue ici le même rôle que la densité des couches de Clairaut. Si l'on admet que $\frac{d\eta'}{dt} < 0$, on peut procéder comme l'a fait M. Stieltjes pour obtenir une limite inférieure de la densité au centre de l'ellipsoïde et l'on arrivera au même résultat. Ainsi, en appelant θ la densité moyenne superficielle, η_1 la densité moyenne au centre, D la densité moyenne de la planète, et λ le rapport $\frac{\int_0^1 \eta' t^2 dt}{\int_0^1 \eta' t^4 dt}$ [1], on a

$$\eta_1 > \theta + \frac{(D-\theta)^{\frac{5}{2}}}{\left(\frac{5D}{3\lambda} - \theta\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

---

[1] *Bulletin astronomique*. tome I, page 465.

Si l'on adopte la valeur $\theta = 2,5$ on a, pour la Terre,

$$\eta > 7,39.$$

VII. — Potentiel extérieur d'une planète.

On a trouvé (46) et (36)

$$V = \mathfrak{M}\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}} - \frac{1}{3}\pi\delta\rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}\left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\left(\rho^2 - \frac{2c^2}{3}\right)\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\left(\rho'^2 - \frac{2c^2}{3}\right)^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Cette expression peut s'écrire, en négligeant des termes du second ordre,

$$V = \mathfrak{M}\left[\int_\rho^\infty \left(\frac{1}{\rho'^2} + \frac{1}{2}\frac{c^2}{\rho'^4}\right)d\rho' - \frac{\delta}{D}c^2\left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\rho^2\int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{\rho'^6}\right]$$

ou, en remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ et $\frac{\delta}{D}$ par $\frac{5}{7}\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$ (47) et (50),

$$V = \mathfrak{M}\left\{\frac{1}{\rho} + \frac{\rho_1^2}{\rho^3}\left[\frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{\mu^2}{c^2} - \frac{2}{3}\right)\right]\right\}.$$

μ et ρ sont les racines de l'équation $\frac{x^2 + y^2}{t^2} + \frac{z^2}{t^2 - c^2} = 1$ (8), ou

$$t^4 - t^2(x^2 + y^2 + z^2 + c^2) + c^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Désignons par r la distance du point attiré au centre de la planète, et par θ l'angle que fait la droite qui joint ces deux points avec l'axe de rotation OZ. L'équation devient

$$t^4 - t^2(r^2 + c^2) + c^2 r^2 \sin^2\theta = 0:$$

on en tire, en négligeant les termes du second ordre,

$$\rho^2 = r^2 + c^2\cos^2\theta$$

et

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{r^2}\cos^2\theta\right) + \ldots \qquad \mu^2 = c^2\sin^2\theta + \ldots$$

Remplaçant c^2 par $2\varepsilon\rho_1^2$ dans $\frac{1}{\rho}$, substituant dans V et négligeant les termes du second ordre,

$$V = \frac{\mathfrak{M}}{r}\left[1 - \frac{\rho_1^2}{r^2}\left(\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2}\right)\left(\cos^2\theta - \frac{1}{3}\right)\right].$$

Le potentiel dépend uniquement des données superficielles ([1]).

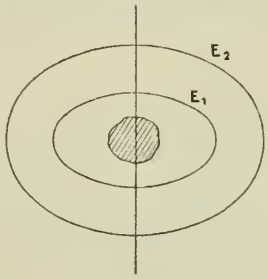
CHAPITRE III.

SUR UN THÉORÈME DE M. POINCARÉ.

I.

Considérons une masse hétérogène composée comme il suit : 1° d'une partie centrale solide de forme et de constitution inconnues, complè-

Fig. 5.



tement plongée au sein d'un liquide limité par un ellipsoïde; 2° d'une autre couche liquide superposée à la première et également limitée à

([1]) *Voir* la note de la page 102.

l'extérieur par un ellipsoïde. Si l'on fait tourner le tout d'un mouvement uniforme autour d'un axe et que, sous l'influence de ce mouvement de rotation, le système se trouve en équilibre, les ellipsoïdes sont homofocaux.

Cette remarquable proposition, qui a été établie par M. Poincaré [1], peut être démontrée simplement lorsque les ellipsoïdes ont les mêmes plans de symétrie et tournent autour d'un de leurs axes [2].

Désignons par V_2 le potentiel de l'ellipsoïde E_2 (*fig.* 5) supposé plein du liquide, de densité θ, qui compose la couche superficielle, pour un point intérieur; par V_1 le potentiel des masses renfermées à l'intérieur de l'ellipsoïde E_1 diminué du potentiel du même ellipsoïde supposé rempli de la matière de densité θ, pour un point extérieur.

Les deux surfaces E_1, E_2 étant en équilibre, la fonction

$$V_1 + V_2 + \frac{\omega^2}{2f} r^2,$$

où r^2 désigne $x^2 + y^2$, $y^2 + z^2$, $z^2 + x^2$ suivant l'axe autour duquel s'effectue le mouvement de rotation, doit se réduire identiquement à une constante sur ces surfaces. V_2, d'après sa nature, et par suite

$$V_2 + \frac{\omega^2}{2f} r^2$$

est une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2 le long de E_1 et de E_2. Il en résulte que V_1 doit être aussi une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2 le long des mêmes surfaces.

Soient

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_1^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\rho_1^2 - c_1^2} = 1, \qquad \frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1$$

les équations de E_1 et E_2. On peut exprimer V_1 à l'aide des produits

---

(1) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* juin 1888.

(2) Cela revient, à cause de ce qui a été dit au § VII du Chapitre I du présent travail, à supposer que le centre de gravité de l'ellipsoïde E_1 et les axes principaux d'inertie relatifs à ce point coïncident avec le centre et les axes de cet ellipsoïde.

SMN qui dépendent des coordonnées elliptiques ρ, μ, ν relatives à l'ellipsoïde E_1 (14)

$$V_1 = \sum \alpha SMN,$$

où les quantités α désignent des constantes. V_1 devant se réduire sur E_1, c'est-à-dire pour $\rho = \rho_1$, à une fonction linéaire de x^2, y^2, z^2, le second membre ne doit contenir que les produits

$$S_0, \quad S_1 M_1 N_1, \quad S_2 M_2 N_2,$$

si souvent considérés,

$$V_1 = \alpha_0 S_0 + \alpha_1 S_1 M_1 N_1 + \alpha_2 S_2 M_2 N_2$$

ou bien

$$\begin{aligned} V_1 = \alpha_0 \int_\rho^\infty & \frac{d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}} \\ & + \alpha_1 R_1 M_1 N_1 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2 \sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}} \\ & + \alpha_2 R_2 M_2 N_2 \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_2'^2 \sqrt{\rho'^2 - b_1^2}\sqrt{\rho'^2 - c_1^2}}. \end{aligned}$$

Le long de l'ellipsoïde E_2, on a

$$\frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1,$$

et la quantité ρ doit vérifier

$$\frac{x^2}{\rho^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b_1^2} + \frac{z^2}{\rho^2 - c_1^2} = 1.$$

$R_1 M_1 N_1$ et $R_2 M_2 N_2$ fonctions linéaires de x^2, y^2, z^2 sont exprimables linéairement en y^2 et z^2 au moyen de la première de ces relations. De même, les intégrales qui entrent dans V_1 dépendent uniquement de y^2 et z^2 à cause de l'équation qui définit ρ, facile à déduire des précédentes,

$$y^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2}\right) + z^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2}\right) = \rho_2^2 - \rho^2.$$

Ainsi le long de E_2, V_1 est une fonction de y^2 et z^2 qui doit être linéaire par rapport à ces variables. On doit donc avoir identiquement

$$\frac{d^2 V_1}{d(y^2)^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{d(y^2)^2} + \alpha_1 \frac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{d(y^2)^2} + \alpha_2 \frac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{d(y^2)^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 V_1}{dy^2\, dz^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{dy^2\, dz^2} + \alpha_1 \frac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{dy^2\, dz^2} + \alpha_2 \frac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{dy^2\, dz^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 V_1}{d(z^2)^2} = \alpha_0 \frac{d^2 S_0}{d(z^2)^2} + \alpha_1 \frac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{d(z^2)^2} + \alpha_2 \frac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{d(z^2)^2} = 0;$$

α_0, α_1, α_2 ne peuvent être nuls simultanément, sans quoi V_1 serait identiquement nul [1]; ces trois identités exigent, par suite,

$$\begin{vmatrix} \dfrac{d^2 S_0}{d(y^2)^2} & \dfrac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{d(y^2)^2} & \dfrac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{d(y^2)^2} \\ \dfrac{d^2 S_0}{dy^2\, dz^2} & \dfrac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{dy^2\, dz^2} & \dfrac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{dy^2\, dz^2} \\ \dfrac{d^2 S_0}{d(z^2)^2} & \dfrac{d^2(S_1 M_1 N_1)}{d(z^2)^2} & \dfrac{d^2(S_2 M_2 N_2)}{d(z^2)^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation de condition est indépendante des constantes α_0, α_1, α_2, et par suite de la constitution interne de l'ellipsoïde E_1. Au lieu de calculer le déterminant, ce qui serait long, on peut donc chercher directement la condition pour que les trois dérivées dont il s'agit soient nulles simultanément *en supposant l'ellipsoïde* E_1 *homogène*.

La formule de Dirichlet peut s'écrire, à un facteur constant près (26),

$$V_1 = \int_0^\infty \frac{1 - \dfrac{x^2}{t^2} - \dfrac{y^2}{t^2 - b_1^2} - \dfrac{z^2}{t^2 - c_1^2}}{\sqrt{t^2 - b_1^2}\sqrt{t^2 - c_1^2}}\, dt.$$

---

[1] Si V_1 était identiquement nul, l'ellipsoïde E_1 agirait au dehors comme s'il était rempli du liquide superficiel. Dans ces conditions, la surface E_1 devrait faire partie des surfaces de niveau d'un ellipsoïde homogène, et ne pourrait être qu'un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde E_2. Le théorème serait en défaut.

Le long de E_2,

$$\frac{x^2}{\rho_2^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2 - b_2^2} + \frac{z^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 1;$$

par suite

$$V_1 = \int_\rho^\infty \frac{1 - \frac{y^2}{t^2 - b_1^2} - \frac{z^2}{t^2 - c_1^2} - \frac{1}{t^2}\left(\rho_2^2 - y^2 \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - z^2 \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)}{\sqrt{t^2 - b_1^2}\sqrt{t^2 - c_1^2}}\, dt.$$

L'équation

$$y^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2}\right) + z^2\left(\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2}\right) = \rho_2^2 - \rho^2,$$

qui lie ρ^2, y^2 et z^2 donne, par différentiation,

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} + \left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]\frac{d(\rho^2)}{d(y^2)} = 0,$$

$$\frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} - \frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} + \left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]\frac{d(\rho^2)}{d(z^2)} = 0.$$

On tire de là, sans difficulté,

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial (y^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2}\right)^2}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]},$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial y^2\, \partial z^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2}\right)\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]},$$

$$\frac{\partial^2 V_1}{\partial (z^2)^2} = \frac{1}{2}\frac{\left(\frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2}\right)^2}{\rho^3\sqrt{\rho^2 - b_1^2}\sqrt{\rho^2 - c_1^2}\left[\frac{b_1^2 y^2}{(\rho^2 - b_1^2)^2} + \frac{c_1^2 z^2}{(\rho^2 - c_1^2)^2} + 1\right]}.$$

Pour que ces trois dérivées soient simultanément nulles, il faut

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - b_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - b_2^2} = 0,$$

$$\frac{\rho^2}{\rho^2 - c_1^2} - \frac{\rho_2^2}{\rho_2^2 - c_2^2} = 0.$$

L'équation que vérifie ρ donnant alors

$$\rho = \rho_2,$$

on a

$$b_1 = b_2,$$

$$c_1 = c_2.$$

Ainsi les ellipsoïdes sont bien homofocaux.

Si, au lieu de deux liquides superposés, il y en avait un nombre quelconque tous séparés par des ellipsoïdes, ces ellipsoïdes seraient homofocaux. On le déduit sans peine des considérations qui précèdent.

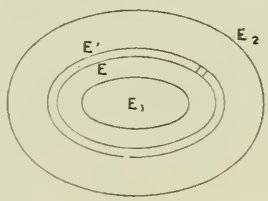
II. — Potentiel d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes homofocaux.

Soient

ρ_1 le paramètre de l'ellipsoïde intérieur E_1 (*fig.* 6);
ρ_2 celui de E_2;
θ la densité de la couche.

En opérant comme on l'a fait pour un ellipsoïde quelconque et em-

Fig. 6.



ployant le développement (19)

$$\frac{\theta}{l'^2} = \theta R'_1 R'_2 + \theta \frac{R'_2}{k^2 - h^2} M'_1 N'_1 + \theta \frac{R'_1}{k^2 - h^2} M'_2 N'_2 = \theta \sum \mathfrak{B}' M' N',$$

on trouve, pour le potentiel de la couche infiniment mince homofocale (E, E'),

$$dv_2 = \frac{\theta\, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \sum \mathfrak{B}' \int\int_{\rho'} \frac{l' M' N'}{\Delta}\, d\omega'.$$

Si le point attiré (ρ, μ, ν) est extérieur à E_2, on a (5)

$$\iint_{(\rho')} \frac{l'M'N'}{\Delta} d\omega' = 4\pi R'SMN \qquad (\rho > \rho_2);$$

s'il est intérieur à E_1,

$$\iint_{(\rho')} \frac{l'M'N'}{\Delta} d\omega' = 4\pi S'RMN \qquad (\rho < \rho_1).$$

Il en résulte, pour le potentiel cherché, si $\rho \geqq \rho_2$,

$$v_2 = 4\pi\theta\left(S_0 + \frac{S_1M_1N_1}{h^2-k^2} + \frac{S_2M_2N_2}{k^2-h^2}\right)\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R'_1R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}};$$

et si $\rho \leqq \rho_1$,

$$v_2 = 4\pi\theta\left(\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R'_1R'_2S'_0\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}} + \frac{R_1M_1N_1}{h^2-k^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_1}{R'_1}\frac{R'_1R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}\right.$$
$$\left. + \frac{R_2M_2N_2}{k^2-h^2}\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_2}{R'_2}\frac{R'_1R'_2\,d\rho'}{\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}}\right).$$

Nous affecterons dans la suite les fonctions R_1, S_1, R_2, S_2 d'un indice supérieur égal à 1 quand on y fera $\rho = \rho_1$, et égal à 2 quand on y fera $\rho = \rho_2$. Ainsi

$$R_1 = \rho^2 - h^2, \qquad S_1 = R_1\int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho'}{R'^2_1\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}},$$
$$R_1^{(1)} = \rho_1^2 - h^2, \qquad S_1^{(1)} = R_1^{(1)}\int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho'}{R'^2_1\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}},$$
$$R_1^{(2)} = \rho_2^2 - h^2, \qquad S_2^{(2)} = R_1^{(2)}\int_{\rho_2}^{\infty} \frac{d\rho'}{R'^2_2\sqrt{\rho'^2-b^2}\sqrt{\rho'^2-c^2}};$$

de même pour R_2 et S_2.

Nous poserons en outre

$$u = \sqrt{\rho^2(\rho^2-b^2)(\rho^2-c^2)},$$
$$u^{(1)} = \sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2-b^2)(\rho_1^2-c^2)},$$
$$u^{(2)} = \sqrt{\rho_2^2(\rho_2^2-b^2)(\rho_2^2-c^2)},$$
$$u' = \sqrt{\rho'^2(\rho'^2-b^2)(\rho'^2-c^2)}.$$

On a (21)

$$\int_c^{\rho} \frac{R'_1 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = \frac{1}{3} u,$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_1}{R'_1} \frac{R'_1 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = \frac{1}{3} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{S'_1}{R'_1} du' = \frac{1}{3} \left[\left(u' \frac{S'_1}{R'_1} \right)_{\rho_1}^{\rho_2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R'_1} \right)_{\rho_1}^{\rho_2} \right].$$

Ainsi l'on a, si $\rho \geqq \rho_2$,

$$v_2 = \frac{4}{3} \pi \theta \left(u^{(2)} - u^{(1)} \right) \left(S_0 + \frac{S_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} + \frac{S_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2} \right);$$

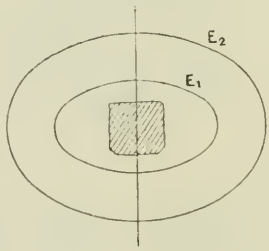
et si $\rho \leqq \rho_1$,

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{4}{3} \pi \theta \Bigg\{ & 3 \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{R'_1 R'_2 S'_0 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ & + \frac{R_1 M_1 N_1}{h^2 - k^2} \left[u^{(2)} \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_1^{(2)}} - \left(u^{(1)} \frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_1^{(1)}} \right) \right] \\ & + \frac{R_2 M_2 N_2}{k^2 - h^2} \left[u^{(2)} \frac{S_2^{(2)}}{R_2^{(2)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_2^{(2)}} - \left(u^{(1)} \frac{S_2^{(1)}}{R_2^{(1)}} - \frac{1}{2} \frac{1}{R_2^{(1)}} \right) \right] \Bigg\}. \end{aligned}$$

III. — Équations d'équilibre.

Revenons au problème de M. Poincaré et supposons que la masse tourne autour du plus petit axe oz. Appelons v_2 le potentiel de la

Fig. 7.



couche homogène superficielle et v_1 le potentiel des masses renfermées à l'intérieur de E_1 (*fig.* 7). La fonction

$$v_1 + v_2 + \frac{\omega^2}{2f} (x^2 + y^2)$$

doit se réduire à une constante sur E_1 et sur E_2. Les développements de v_2 et de x^2+y^2 ne contiennent pas d'autres produits MN que

$$M_0 N_0 = 1, \quad M_1 N_1, \quad M_2 N_2;$$

il doit en être de même pour v_1. Ainsi, en représentant comme nous l'avons fait jusqu'ici la densité à l'intérieur de E_1 par la série

$$\frac{\delta}{l'^2} = \Sigma \mathfrak{a}' M' N',$$

où $\mathfrak{a}'$ dépend de ρ' seulement, on a, à l'extérieur de E_1,

$$\begin{aligned} v_1 = \mathfrak{M}_1 S_0 &+ S_1 M_1 N_1 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &+ S_2 M_2 N_2 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}; \end{aligned}$$

$\mathfrak{M}_1$ est la masse de E_1, $\mathfrak{a}'_1$ et $\mathfrak{a}'_2$ les coefficients de $M'_1 N'_1$ et $M'_2 N'_2$ dans $\frac{\delta}{l'^2}$.

Tous les autres coefficients $\mathfrak{a}'$ doivent vérifier la relation

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}' R' \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0,$$

ce qui équivaut, comme on l'a vu, à

$$\iiint R' M' N' \, dm' = 0.$$

En posant

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{h^2 - k^2}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &= \frac{h^2 - k^2}{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \\ \eta_2 &= \frac{k^2 - h^2}{\frac{4}{3}\pi\sqrt{\rho_1^2(\rho_1^2 - b^2)(\rho_1^2 - c^2)}} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}} \\ &= \frac{k^2 - h^2}{\frac{4}{3}\pi u^{(1)}} 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{a}'_2 R'_2 \, d\rho'}{\sqrt{\rho'^2 - b^2}\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \end{aligned}$$

il vient

$$c_1 = \mathfrak{M}_1 S_0 + \frac{\frac{4}{3}\pi u^{(1)} \tau_{11}}{h^2 - k^2} S_1 M_1 N_1 + \frac{\frac{4}{3}\pi u^{(1)} \tau_{12}}{k^2 - h^2} S_2 M_2 N_2.$$

Joignons à cette formule le développement

$$x^2 + y^2 = \frac{2\rho^2 - b^2}{3} + \frac{M_1 N_1}{3(k^2 - h^2)}\left(\frac{R_1}{c^2 - h^2} + 2\right) + \frac{M_2 N_2}{3(h^2 - k^2)}\left(\frac{R_2}{c^2 - k^2} + 2\right).$$

En faisant successivement

$$\rho = \rho_2 \qquad \text{et} \qquad \rho = \rho_1$$

dans la fonction

$$c_1 + c_2 + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2),$$

que nous pouvons maintenant développer en produits de Lamé, et égalant à zéro le coefficient de $M_1 N_1$, on arrive aux deux équations

$$\theta u^{(2)} S_1^{(2)} + (\tau_{11} - \theta) u^{(1)} S_1^{(2)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right),$$

$$\theta R_1^{(1)}\left(u^{(2)} \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right) + (\tau_{11} - \theta) u^{(1)} S_1^{(1)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right).$$

En égalant à zéro le coefficient de $M_2 N_2$, on obtiendrait deux autres équations qui se déduisent des précédentes en y remplaçant l'indice inférieur 1 par l'indice 2 et h^2 par k^2.

On tire des deux équations écrites

$$\theta = \frac{S_1^{(1)}\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right) - S_1^{(2)}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right)}{u^{(2)} S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_1^{(2)}}\right)\right]} \frac{\omega^2}{8\pi f},$$

$$\tau_{11} - \theta = \frac{S_1^{(2)}\left(\frac{R_1^{(1)}}{c^2 - h^2} + 2\right) - R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]\left(\frac{R_1^{(2)}}{c^2 - h^2} + 2\right)}{u^{(1)} S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2u^{(2)}}\left(\frac{1}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{R_1^{(2)}}\right)\right]} \frac{\omega^2}{8\pi f}.$$

La fonction de ρ, $\frac{S_1}{R_1} - \frac{1}{2u^{(2)}}\frac{1}{R_1}$, a pour dérivée $\frac{\rho}{R_1^2}\left(\frac{1}{u^{(2)}} - \frac{1}{u}\right)$. Cette

dérivée est négative pour $\rho < \rho_2$. Il en résulte que les dénominateurs de θ et de $(\eta_1 - \theta)$ sont positifs.

La fonction $\dfrac{\dfrac{R_1}{c^2 - h^2} + 2}{S_1}$ a pour dérivée $\dfrac{\rho}{S_1^2}\left[-4\dfrac{S_1}{R_1} + \left(\dfrac{1}{c^2 - h^2} + \dfrac{2}{R_1}\right)\dfrac{1}{u}\right]$. La quantité entre crochets est décroissante, car sa dérivée est $\left(\dfrac{1}{c^2 - h^2} + \dfrac{2}{R_1}\right)\dfrac{d}{d\rho}\left(\dfrac{1}{u}\right) < 0$; elle est nulle pour $\rho = \infty$, donc elle est toujours positive. Il en résulte que la fonction dont nous nous occupons est croissante. Ainsi le numérateur de θ est positif et par suite θ est positif. Si la valeur trouvée pour θ avait été négative, le problème, tel qu'il a été posé, n'eût pas été possible puisque θ représente une densité.

On peut mettre le numérateur de $\eta_1 - \theta$ sous la forme

$$\frac{1}{2}(R_1^{(2)} - R_1^{(1)})\left[4\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{u^{(2)}}\left(\frac{1}{c^2 - h^2} + \frac{2}{R_1^{(2)}}\right)\right].$$

Le premier facteur est égal à $\rho_2^2 - \rho_1^2 > 0$. Le second est une fonction de ρ_2 que nous venons de rencontrer; il est toujours négatif. On a donc $\eta_1 - \theta < 0$. La discussion des deux autres équations conduirait de même à $\eta_2 - \theta < 0$. Ces conditions doivent nécessairement être vérifiées pour que l'équilibre soit possible.

Supposons l'ellipsoïde E_1 fluide. Peut-il être composé de couches séparées par des ellipsoïdes? En vertu du théorème de M. Poincaré, ces surfaces seraient homofocales. Il en résulterait $\eta_1 = \eta_2 = \delta$, densité moyenne de l'ellipsoïde E_1 (Ier Chap., § VIII), et l'on devrait avoir $\delta < \theta$, en vertu de ce qui précède.

En d'autres termes, les fluides internes devraient être en partie plus légers que le fluide composant la couche superficielle [1]. Cette hypothèse est irréalisable physiquement.

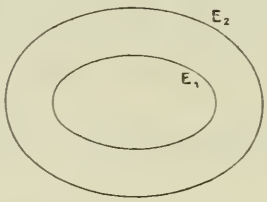
---

[1] Ce théorème n'est pas différent de celui auquel je suis arrivé dans mon *Mémoire sur la figure des corps célestes* (*Annales de l'Observatoire de Paris*, t. XIX).

IV.

Supposons les deux ellipsoïdes homofocaux de révolution autour de l'axe de rotation et aplatis suivant cet axe (*fig.* 8). Le calcul du po-

Fig. 8.



tentiel de la couche homogène comprise entre les deux ellipsoïdes homofocaux se ferait en partant de l'identité

$$\frac{1}{l^2} = R'_1 R'_2 - R'_2 M'_1 N'_1.$$

On trouverait, comme pour l'ellipsoïde à trois axes, si $\rho < \rho_2$,

$$c_2 = \frac{4}{3}\pi\theta(u^{(2)} - u^{(1)})(S_0 - S_1 M_1 N_1);$$

et si $\rho > \rho_1$,

$$c_2 = \frac{4}{3}\pi\theta\left\{3\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{R'_1 R'_2 S'_0\, d\rho'}{\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}\right.$$
$$\left. - R_1 M_1 N_1\left[u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^2} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^2} - \left(u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]\right\}.$$

En représentant par la série

$$\frac{\delta}{l^2} = \Sigma\, \mathfrak{B}' M' N'$$

la densité δ à l'intérieur de E_1, on a, pour le potentiel de E_1,

$$v_1 = \mathrm{SMN}' 4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' \mathrm{R}' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

Ces formules et la suivante

$$x^2 + y^2 = \frac{2}{3} \rho^2 + \frac{\rho^2}{c^2} \mathrm{M}_1 \mathrm{N}_1$$

permettent de développer la fonction $v_1 + v_2 + \frac{\omega^2}{2f}(x^2 + y^2)$ en produits MN. Cette fonction doit se réduire à une constante le long de E_1 et le long de E_2 : donc, pour $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$, tous les coefficients du développement doivent être nuls.

On est donc conduit à poser

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}' \mathrm{R}' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} = 0$$

pour tous les coefficients $\mathfrak{B}'$, sauf pour le coefficient $\mathfrak{B}'_1$, ce qui équivaut (35) à

$$\int\int\int \mathrm{R}' \mathrm{M}' \mathrm{N}' \, dm' = 0.$$

En substituant les différents polynômes $\mathrm{R}'\mathrm{M}'\mathrm{N}'$ du premier et du deuxième degré dans cette relation, on trouverait que le centre de gravité de E_1 est au centre de l'ellipsoïde et que les axes principaux d'inertie relatifs au centre de gravité coïncident en direction avec les axes de E_1.

Le polynôme $\mathrm{R}'_2 \mathrm{M}'_2 \mathrm{N}'_2$, qui est égal à $\frac{c^2}{2}(x'^2 - y'^2)$, donne

$$\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}_1,$$

en appelant A_1 et B_1 les moments d'inertie principaux équatoriaux de l'ellipsoïde E_1.

En posant

$$\gamma_1 = -\frac{4\pi \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{B}'_1 \mathrm{R}'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}}}{\frac{4}{3}\pi \rho_1^2 \sqrt{\rho_1^2 - c^2}},$$

et égalant à zéro les coefficients de $M_1 N_1$ pour $\rho = \rho_1$ et $\rho = \rho_2$, on a

$$\theta R_1^{(1)}\left(u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(2)}} - u^{(1)}\frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} + \frac{1}{2}\frac{1}{R_1^{(1)}}\right) + \eta_1 u^{(1)} S_1^{(1)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\frac{3\rho_1^2}{c^2},$$

$$\theta S_1^{(2)}(u^{(2)} - u^{(1)}) + \eta_1 u^{(1)} S_1^{(2)} = \frac{\omega^2}{8\pi f}\frac{3\rho_2^2}{c^2},$$

où

$$R_1 = \rho^2 - \frac{2c^2}{3}, \qquad R_1^{(1)} = \rho_1^2 - \frac{2c^2}{3}, \qquad R_1^{(2)} = \rho_2^2 - \frac{2c^2}{3},$$

$$u = \rho^2\sqrt{\rho^2 - c^2}, \qquad u^{(1)} = \rho_1^2\sqrt{\rho_1^2 - c^2}, \qquad u^{(2)} = \rho_2^2\sqrt{\rho_2^2 - c^2},$$

$$\frac{S_1}{R_1} = \int_\rho^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad \frac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} = \int_{\rho_1}^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}, \qquad \frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} = \int_{\rho_2}^\infty \frac{d\rho'}{R_1'^2\rho'\sqrt{\rho'^2 - c^2}}.$$

On tire de ces équations

$$\theta = \frac{\dfrac{3}{c^2}(\rho_1^2 S_1^{(2)} - \rho_2^2 S_1^{(1)})}{S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\left(\dfrac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \dfrac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1^{(2)}} - \dfrac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f},$$

$$u^{(1)}\eta_1 = \frac{\dfrac{3}{c^2}\left\{\rho_2^2 R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\dfrac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{R_1^{(2)}} - \left(u^{(1)}\dfrac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}} - \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right] - \rho_1^2 S_1^{(2)}(u^{(2)} - u^{(1)})\right\}}{S_1^{(2)} R_1^{(1)}\left[u^{(2)}\left(\dfrac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \dfrac{S_1^{(1)}}{R_1^{(1)}}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_1^{(2)}} - \dfrac{1}{R_1^{(1)}}\right)\right]}\frac{\omega^2}{8\pi f}.$$

Le dénominateur de ces expressions est négatif, parce que la fonction de ρ

$$u^{(2)}\frac{S_1}{R_1} - \frac{1}{2}\frac{1}{R_1}$$

est décroissante quand $\rho < \rho_2$. La fonction $\dfrac{\rho^2}{S_1}$ est croissante (on le montre au moyen de deux dérivations). Il en résulte que θ est positif.

Nous poserons dans le numérateur de η_1, après avoir effectué les intégrations,

$$\rho_2^2 = c^2\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}, \qquad \rho_1^2 = c^2\frac{1+\mu^2}{\mu^2};$$

ce qui nécessite, à cause de $\rho_2 > \rho_1$,

$$\lambda < \mu.$$

On a

$$\frac{S_1}{R_1} = \frac{9}{4c^5}\left(\operatorname{arc\,tang}\frac{c}{\sqrt{\rho^2-c^2}} - \frac{3c\sqrt{\rho^2-c^2}}{3\rho^2-2c^2}\right),$$

d'où

$$\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} = \frac{9}{4c^5}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right),$$

$$R_1^{(2)} = \frac{c^2}{3}\,\frac{3+\lambda^2}{\lambda^2},$$

$$u^{(2)} = c^3\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3},$$

$$u^{(2)}\frac{S_1^{(2)}}{R_1^{(2)}} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{R_1^{(2)}} = \frac{9}{4c^2}\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda) + \frac{1}{3}\right].$$

Le numérateur de $u^{(1)}\eta$ devient

$$-\frac{9}{4}\,\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}\left\{-\frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\left[\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \lambda) - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}(\operatorname{arc\,tang}\mu - \mu)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\left(\operatorname{arc\,tang}\lambda - \frac{3\lambda}{3+\lambda^2}\right)\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)\right\}.$$

On peut écrire cette fonction, abstraction faite du facteur négatif $-\frac{9}{4}\,\frac{1+\mu^2}{\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2}$,

$$\operatorname{arc\,tang}\lambda\left[\frac{3+\lambda^2}{1+\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\right]$$
$$- \frac{3\lambda}{1+\lambda^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) + \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^2} + \frac{3+\mu^2}{\mu^3}(\operatorname{arc\,tang}\mu - \mu).$$

Sa dérivée par rapport à λ est

$$\frac{3+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{1}{\lambda^3}$$
$$- 3\,\frac{1-\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) + \frac{3(3+\lambda^2)}{(1+\lambda^2)\lambda^3} - \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{2}{\lambda^3}$$
$$+ \operatorname{arc\,tang}\lambda\left[-\frac{4\lambda}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} - \frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right) - \frac{(3+\lambda^2)^2}{(1+\lambda^2)\lambda^4} + \frac{3+\mu^2}{1+\mu^2}\,\frac{3+\lambda^2}{\lambda^4}\right],$$

ou bien

$$\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}-\frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)+\frac{3}{\lambda^3}\left(\frac{2}{1+\lambda^2}-\frac{2}{1+\mu^2}\right)$$
$$-\frac{\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda}\left[\frac{4\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\left(\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}-\frac{1+\mu^2}{\mu^3}\right)+\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{2}{1+\lambda^2}-\frac{2}{1+\mu^2}\right)\right]$$

ou

$$2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+3\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^3\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2}$$
$$-\frac{\operatorname{arc\,tang}\lambda}{\lambda}2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^3\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2}.$$

ce qui équivaut à

$$2(\mu-\lambda)\frac{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{\lambda^4\mu^3(1+\mu^2)(1+\lambda^2)^2}$$
$$\times\left[\lambda-\operatorname{arc\,tang}\lambda-\frac{\mu^3\lambda^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}{2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\mu^2\lambda^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)}\right].$$

Cette dérivée a le signe du crochet. Différentions le crochet par rapport à λ. On arrive, toutes réductions faites, à

$$\frac{\begin{array}{l|l|l|l|l|l|l}
6\mu^5 & \lambda^4+12\mu^7 & \lambda^5+18\mu^8 & \lambda^6+20\mu^7 & \lambda^7+18\mu^8 & \lambda^8+8\mu^7 & \lambda^9+6\mu^8 \;|\; \lambda^{10} \\
-10\mu^6 & +20\mu^5 & +50\mu^6 & +56\mu^5 & +58\mu^6 & +44\mu^5 & +14\mu^6 \\
 & & +28\mu^4 & +20\mu^3 & +56\mu^4 & +36\mu^3 & +24\mu^4 \\
 & & & & +12\mu^2 & +8\mu & +16\mu^2 \\
 & & & & & & +4
\end{array}}{[2(1+\mu^2)\lambda^2(\mu^2+\lambda\mu+\lambda^2+\lambda^2\mu^2)+(3+\lambda^2)\mu^3(1+\lambda^2)(\mu+\lambda)]^2}>0.$$

Ainsi l'expression entre crochets est croissante. Elle est nulle pour $\lambda=0$, donc elle est toujours positive. Il résulte de là que la dérivée première de la fonction dont nous nous occupons est positive, et que cette fonction va en croissant avec λ. μ ne peut être dépassé par λ; on obtiendra donc la plus grande valeur de la fonction en y faisant $\lambda=\mu$. Le résultat de la substitution est nul. Ainsi la fonction à étudier est toujours négative. Il en résulte que le numérateur de η est essentiellement positif et que η a le signe de son dénominateur, qui est négatif.

La condition $\eta_1 < 0$ équivaut à

$$\int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}'_1 R'_1 \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}} > 0,$$

et, à cause de l'identité (35),

$$\iiint R' M' N' \, dm = \iint I' (M' N')^2 \, d\omega' \int_c^{\rho_1} \frac{\mathfrak{M}' R' \, d\rho'}{\rho' \sqrt{\rho'^2 - c^2}};$$

on doit avoir

$$\iiint R'_1 M_1 N'_1 \, dm' > 0$$

ou (11)

$$\iiint \left[2 z'^2 - (x'^2 + y'^2) + \frac{2 c^2}{3} \right] dm' < 0,$$

l'intégrale triple étant étendue à l'ellipsoïde E_1.

Les deux moments d'inertie A_1 et B_1 étant égaux, cette inégalité peut s'écrire

$$A_1 - C_1 + \frac{c^2}{3} \mathfrak{M}_1 < 0.$$

On peut se faire une idée grossière de la distribution de la densité à l'intérieur de l'ellipsoïde E_1. L'hyperboloïde à une nappe, ayant pour équation

$$2 z^2 - (x^2 + y^2) + \frac{2 c^2}{3} = 0,$$

sépare l'espace en deux régions. Dans celle qui contient l'axe OZ (*fig.* 9), la fonction $2 z^2 - x^2 - y^2 + \frac{2 c^2}{3}$ est positive; dans l'autre région, cette fonction est négative. Quand l'ellipsoïde est homogène, on a

$$\iiint \left(2 z'^2 - x'^2 - y'^2 + 2 \frac{c^2}{3} \right) dm'$$
$$= 2 \left(A_1 - C_1 + \frac{c^2}{3} \mathfrak{M}_1 \right) = \tfrac{4}{15} c^2 \mathfrak{M}_1 > 0.$$

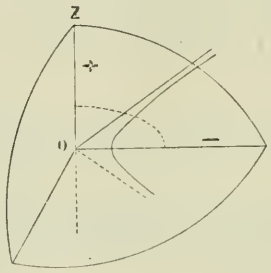
Ainsi, dans la question qui nous occupe, les matières les plus denses doivent être placées dans la région où ne se trouve pas l'axe OZ, c'est-à-dire près de l'équateur, sans quoi l'intégrale triple ne pourrait être négative.

L'inégalité

$$C_1 - A_1 > \frac{c^2}{3} \mathfrak{M}_1$$

permet d'affirmer que les figures dont nous nous occupons, si elles sont réalisables, n'existent pas dans le système planétaire. Désignons par

Fig. 9.



C_2 et A_2 les moments d'inertie principaux de la couche homogène supérieure. L'expression connue des moments d'inertie d'un ellipsoïde homogène donne

$$C_2 - A_2 = \frac{c^2}{5} \mathfrak{M}_2.$$

En ajoutant membre à membre à l'inégalité qui précède, on a, pour la différence des moments d'inertie de toute la masse,

$$C - A > \frac{c^2}{3} \mathfrak{M}_1 + \frac{c^2}{5} \mathfrak{M}_2$$

et, *a fortiori*,

$$C - A > \frac{c^2}{5} \mathfrak{M},$$

où $\mathfrak{M}$ est la masse totale. Or on a trouvé, pour un ellipsoïde peu aplati dont la surface est de niveau (51),

$$C - A = \mathfrak{M} \tfrac{2}{3} \rho_2^2 (\varepsilon - \tfrac{1}{2} \varphi),$$

en appelant ρ_2 le rayon équatorial, ε l'aplatissement de la surface et φ le rapport de la force centrifuge à la pesanteur à l'équateur.

Portant cette valeur dans l'inégalité et remplaçant $\frac{c^2}{\rho_2^2}$ par 2ε, il vient

$$\tfrac{2}{3}\left(\varepsilon - \tfrac{1}{2}\varphi\right) > \tfrac{2}{5}\varepsilon$$

ou

$$\varepsilon > \frac{5\varphi}{4}.$$

C'est cette inégalité qui est en contradiction avec ce que l'on observe dans le système planétaire.

Nous déduirons un autre résultat de la condition $\eta_1 < 0$.

Supposons l'ellipsoïde E_1 entièrement fluide. Peut-il être composé de couches toutes séparées par des ellipsoïdes? En vertu du théorème de M. Poincaré, toutes ces surfaces seraient homofocales. La quantité η_1 représenterait, dans ces conditions, la densité moyenne de l'ellipsoïde E_1. On voit donc que l'équilibre ne pourrait exister que si la densité moyenne de cet ellipsoïde était négative, c'est-à-dire si les masses internes étaient en majeure partie répulsives [1].

---

[1] Ce théorème est plus général que celui auquel je suis arrivé dans mon Mémoire déjà cité.

Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives;

PAR M. ÉMILE PICARD.

INTRODUCTION.

Considérons une équation du second ordre aux dérivées partielles de la forme

$$(1)\qquad A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

A, B, C dépendant seulement des deux variables indépendantes x et y. On peut, pour intégrer cette équation, avec des conditions aux limites déterminées, procéder de la manière suivante par approximations successives. Nous mettons dans le second membre une fonction quelconque u_1 de x et y, et formons l'équation

$$\Delta u_2 = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right)$$

$\left(\text{en posant ici, pour abréger, } \Delta u = A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$. Concevons qu'on intègre cette équation en u_2, en se donnant certaines conditions aux limites, qui, nous le supposons, déterminent complètement une intégrale que nous désignerons par u_2. On formera ensuite

l'équation

$$\Delta u_3 = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

et l'on intégrera cette équation en u_3, en satisfaisant aux mêmes conditions aux limites que plus haut, et nous continuons ainsi indéfiniment. Si l'intégrale u_n tend vers une limite déterminée u, quand n grandira indéfiniment, on obtiendra ainsi l'intégrale u de l'équation (1) satisfaisant aux conditions données.

Ces généralités n'ont d'intérêt qu'autant qu'on précise les conditions aux limites, et qu'on se place dans des conditions où l'on puisse établir rigoureusement la convergence de u_n vers une limite u : c'est le but de ce Mémoire. Nous allons essentiellement supposer que dans la région du plan où reste le point (x, y) le discriminant $B^2 - AC$ garde un signe invariable. Nous pourrons, par suite, réduire notre équation (1) aux deux types suivants

$$(A) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

$$(B) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

pour lesquels les problèmes à poser sont entièrement différents.

Pour les équations de la première forme, nous nous donnons, comme condition aux limites, la valeur des fonctions u_n le long d'un contour fermé C, et nous voulons qu'elles restent continues ainsi que leurs dérivées partielles des deux premiers ordres à l'intérieur du contour. L'étude de u_n montre qu'elle converge vers une limite, tant que C satisfait à certaines conditions, qui, en particulier, seront remplies *quand ce contour limitera une aire suffisamment petite*. On obtiendra dans ce cas *une intégrale de l'équation* (A) *prenant sur le contour une succession continue donnée de valeurs*. Cette intégrale, comme nous le montrons, est d'ailleurs *unique*, si l'équation est linéaire, quand le contour est suffisamment petit.

On ne peut pas affirmer, d'une manière générale, que l'intégrale soit unique, quand F n'est pas linéaire en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$.

Dans le cas de l'équation (B), les conditions aux limites doivent

être prises d'une manière toute différente. Nous prenons ici un arc de courbe C, et nous nous donnons le long de C les valeurs de $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ ainsi que la valeur de u_n en un point A de C. Soit B un second point de la courbe C, et tel que les coordonnées d'un point M de la courbe varient constamment dans le même sens, quand M va de A à B; considérons le rectangle parallèle aux axes, dont A et B sont deux sommets opposés. Si B est suffisamment rapproché de A, u_n tendra vers une limite u pour tous les points de ce rectangle, *et l'on aura l'intégrale de l'équation* (B) *qui prend en* A *une valeur donnée, et pour laquelle* $\frac{\partial u}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial u}{\partial y}$ *prennent sur l'arc* AB *une succession continue donnée de valeurs;* u, ainsi que ses deux dérivées partielles du premier ordre, sont des fonctions continues de x et y, même quand on traverse l'arc AB.

Les théorèmes, indiqués plus haut, relatifs à l'équation (A) ne sont exacts que si le contour C a une aire suffisamment petite. Il est très intéressant de trouver des équations, où, *sans restriction,* une intégrale, supposée continue ainsi que ses dérivées partielles, soit toujours déterminée par ses valeurs sur un contour fermé quelconque.

On peut en donner des exemples étendus. Ainsi cette circonstance se présentera pour l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

si, remplaçant $\frac{\partial u}{\partial x}$ par v, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ par w, on a l'inégalité

$$4F'_u > (F'_v)^2 + (F'_w)^2,$$

quels que soient u, v, w. En particulier, si F ne dépend ni de $\frac{\partial u}{\partial x}$ ni de $\frac{\partial u}{\partial y}$ et croît constamment avec u, cette condition sera vérifiée.

Nous faisons spécialement l'étude de ce cas où l'équation peut s'écrire

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

F *croissant toujours en même temps que* u.

Supposant d'abord F toujours *positif*, nous cherchons ce que va nous donner ici la méthode d'approximations successives. Son emploi conduit à un résultat bien curieux. *Cette méthode conduit non pas à une, mais à deux limites u et v.* Ces fonctions u et v prennent les valeurs données sur le contour, et satisfont aux deux équations

$$\Delta u = F(v, x, y),$$
$$\Delta v = F(u, x, y).$$

Pour que le problème, de trouver une intégrale de l'équation proposée prenant des valeurs données sur un contour, fût résolu, il faudrait que $u = v$; il n'en est pas ainsi quand le contour C est quelconque, mais cette identité est vérifiée si le contour est suffisamment petit.

De ce cas particulier, nous montrons ensuite qu'on peut passer à un contour quelconque. En effet, *le problème étant traité pour deux contours ayant une partie commune pourra être résolu pour le contour limitant extérieurement l'ensemble des deux aires.* Le procédé alterné, dont ont fait usage M. Schwarz et M. Neumann dans leurs mémorables travaux sur l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, peut, avec des modifications d'ailleurs assez sensibles, s'étendre à notre équation générale, et, par suite, *se trouve complètement effectuée la recherche de l'intégrale, d'ailleurs unique, de l'équation*

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

prenant une succession continue donnée de valeurs sur un contour fermé quelconque.

Je considère aussi un autre cas intéressant : celui où, la fonction F, toujours croissante avec u, s'annule pour $u = 0$.

Les intégrales considérées jusqu'ici étaient continues à l'intérieur de l'aire. Prenant, en particulier, l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A(x, y)\, e^u,$$

j'examine le cas où l'intégrale aurait des points singuliers logarithmiques et je porte ensuite particulièrement mon attention sur l'équation

suivante qui présente un grand intérêt, tant en Géométrie qu'en Analyse,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

où k désigne une constante positive, et qu'on peut appeler *équation de Liouville*. J'approfondis l'étude des intégrales de cette équation, en les considérant dans tout le plan et en examinant spécialement celles qui sont continues dans tout le plan, à l'exception d'un certain nombre de points singuliers logarithmiques pour lesquels on regarde comme donnés les coefficients correspondants (satisfaisant seulement à certaines inégalités); je signalerai ici le résultat suivant :

Ces intégrales dépendent seulement d'une constante arbitraire, et une intégrale de cette sorte est déterminée quand on donne sa valeur en un point du plan distinct des points singuliers.

Après avoir étudié les intégrales sur le plan simple, j'étends cette théorie au plan multiple, c'est-à-dire au plan recouvert d'un certain nombre de feuillets formant une surface de Riemann.

J'indique, en terminant ce Chapitre, que les résultats précédents relatifs à l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

ne sont pas sans intérêt pour la théorie des fonctions fuchsiennes; je me réserve de revenir ultérieurement sur cette application toute spéciale de la théorie générale, que j'ai essayé de développer dans ce Mémoire.

Dans un dernier Chapitre, j'applique aux équations différentielles ordinaires les méthodes d'approximation dont je viens de faire usage. Il est spécialement intéressant de considérer un système d'équations différentielles de la forme

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y_1}{dx^2} &= f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\
\frac{d^2 y_2}{dx^2} &= f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{d^2 y_m}{dx^2} &= f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),
\end{aligned}$$

et d'obtenir un système d'intégrales de ces équations, continues depuis

$x = a$ jusqu'à $x = b$, et prenant pour ces valeurs extrêmes des valeurs données.

Les mêmes considérations s'appliqueraient à un système d'équations aux dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} = f_m(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

Moyennant certaines hypothèses très générales sur les f, on peut déterminer *un* système d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ prenant des valeurs données sur un contour [1].

CHAPITRE I.

ÉQUATIONS DU TYPE (A).

I. — Équations linéaires.

1. Parmi les équations (A), considérons d'abord le cas où l'équation est linéaire et homogène, c'est-à-dire l'équation de la forme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2d\frac{\partial u}{\partial x} + 2e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0,$$

d, e, f ne dépendant que de x et y.

[1] J'ai traité dans deux Communications à l'Académie des Sciences de questions se rapportant au sujet qui fait l'objet de ce travail (*Comptes rendus*, 10 décembre 1888 et 23 septembre 1889). J'ai donné un résumé du présent Mémoire dans les *Comptes rendus* du 13 janvier 1890.

Nous allons montrer d'abord qu'*il ne peut exister deux intégrales de cette équation, uniformes et continues dans l'aire limitée par un contour fermé* C, *et prenant sur* C *la même valeur, pourvu que ce contour soit suffisamment petit.*

Soit, en effet, u la différence de ces deux intégrales; u s'annulera sur C.

On aura évidemment

$$\int\int u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+2d\frac{\partial u}{\partial x}+2e\frac{\partial u}{\partial y}+fu\right)dx\,dy=0,$$

l'intégrale étant étendue à l'aire limitée par C. Après intégration par parties, la relation précédente devient

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+u^2\left(\frac{\partial d}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}-f\right)\right]dx\,dy=0.$$

Si le coefficient de u^2 est positif dans la région considérée, la démonstration est achevée, et n'est qu'une copie de ce que l'on fait pour le cas classique de l'équation de Laplace. Dans le cas général, un artifice est nécessaire. Quelles que soient les fonctions réelles et continues B′ et B de x et y, on a

$$\int\int\left[\frac{\partial(\mathrm{B}u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\mathrm{B}'u^2)}{\partial y}\right]dx\,dy=0,$$

puisque, par hypothèse, u s'annule sur le bord.

Nous pouvons donc écrire, en faisant la somme des deux dernières équations,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}\int\int\Bigg[&\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2\mathrm{B}u\frac{\partial u}{\partial x}+2\mathrm{B}'u\frac{\partial u}{\partial y}\\&+u^2\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}+\frac{\partial d}{\partial x}+\frac{\partial e}{\partial y}-f\right)\Bigg]dx\,dy=0.\end{aligned}\right.$$

Nous avons, entre crochets, une forme quadratique en u, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$. Elle sera *définie*, si l'on a

$$\mathrm{B}^2+\mathrm{B}'^2<\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}+\theta,$$

en posant

$$\theta = \frac{\partial d}{\partial x} + \frac{\partial e}{\partial y} - f.$$

Or, quelle que soit la fonction continue $\theta(x, y)$, on peut déterminer deux fonctions B et B′, telles que, *dans le voisinage* d'un point arbitraire P, on ait

$$(2) \qquad B^2 + B'^2 - \theta < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y}.$$

Pour le montrer, nous n'avons qu'à remplacer $-\theta$ par sa plus grande valeur absolue. En désignant celle-ci par m^2, nous aurons à satisfaire à l'égalité

$$B^2 + B'^2 + m^2 < \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B'}{\partial y},$$

et cette dernière inégalité entraînera évidemment la précédente.

Or faisons $B' = 0$ et prenons B fonction de x seul et satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial B}{\partial x} - B^2 = m_1^2,$$

m_1^2 étant une constante supérieure à m^2. On aura

$$B = m_1 \operatorname{tang}(m_1 x + C),$$

C étant une constante; donc, dans un intervalle compris entre deux parallèles à l'axe des y, dont la distance est moindre que $\frac{\pi}{m_1}$, on pourra certainement déterminer B, de façon à satisfaire à la condition indiquée. J'ai discuté d'ailleurs cette inégalité, avec un peu plus de détails, dans un Mémoire inséré aux *Acta mathematica*, t. XII.

En résumé, dans la région du plan autour de P, pour laquelle on peut déterminer des fonctions continues B et B′ satisfaisant à l'inégalité (2), nous devrons avoir nécessairement, pour que l'égalité (1) soit possible,

$$u = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Il ne peut donc y avoir, en dehors de zéro, de solution de l'équation aux dérivées partielles s'annulant sur le contour C et restant, ainsi

que ses dérivées, uniforme et continue à l'intérieur. *Le théorème est donc démontré.*

On pourrait encore procéder autrement : la première des intégrales doubles écrites plus haut peut aussi se remplacer par

$$\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2-2du\frac{\partial u}{\partial x}-2eu\frac{\partial u}{\partial y}-fu^2\right]dx\,dy=0;$$

nous aurons donc

$$0=\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2+2(\mathrm{B}-d)u\frac{\partial u}{\partial x}\right.$$
$$\left.+2(\mathrm{B}'-e)u\frac{\partial u}{\partial y}+\left(\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}-f\right)u^2\right]dx\,dy.$$

La forme quadratique entre crochets sera définie si

$$\frac{\partial \mathrm{B}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{B}'}{\partial y}-f>(\mathrm{B}-d)^2+(\mathrm{B}'-e)^2.$$

et l'on retombe sur une inégalité qui se ramène immédiatement à celle que nous avons obtenue plus haut.

En particulier, si l'on a

$$d^2+e^2+f<0$$

pour tous les points d'une certaine aire, on ne pourra avoir qu'une solution.

2. La question, que nous devons examiner maintenant, est la question inverse, c'est-à-dire la démonstration de l'existence et la détermination de l'intégrale donnée par ses valeurs sur un contour suffisamment petit C.

Nous allons chercher à appliquer la méthode d'approximations successives, dont nous avons parlé dans l'Introduction ; mais, auparavant, commençons par étudier l'équation suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

On sait qu'on peut trouver facilement l'intégrale de cette équation, restant continue dans un contour C et s'annulant sur ce contour; cette intégrale est donnée par la formule

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

cette intégrale double étant étendue à l'aire limitée par C, et G désignant la *fonction de Green* relative à C et au point (x, y).

Approfondissons l'étude de cette fonction $u(x, y)$. Tout d'abord on peut trouver une limite supérieure de la valeur absolue de u. Si, en effet, F est le module maximum de $f(x, y)$ dans C, on aura

$$|u| < \frac{F}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta = F.A,$$

en désignant par A l'intégrale double, divisée par 2π; A dépend de x et y, mais a un certain maximum quand le point (x, y) se déplace dans l'aire limitée par C; ce maximum M tend vers zéro quand l'aire tend vers zéro.

La fonction $u(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre; prenons la dérivée par rapport à x; elle est donnée par la formule

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\frac{\partial G}{\partial x}\, d\xi\, d\eta.$$

Cette intégrale double a un sens, parfaitement déterminé, quand le point (x, y) est à l'intérieur de l'aire; en effet, $G(\xi, \eta, x, y)$ est définie par cette condition, d'être une fonction harmonique de ξ et η s'annulant sur le contour C, continue à l'intérieur de C, sauf au point (x, y), où elle devient infinie comme

$$-\tfrac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2].$$

On a donc

$$G = -\tfrac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + g,$$

la fonction g étant continue dans C et prenant sur le contour la valeur $\frac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$. La fonction g a donc des dérivées par-

tielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$ parfaitement déterminées, et $\frac{\partial G}{\partial x}$, par exemple, devient infinie, pour $\xi = x$, $\eta = y$, comme

$$\frac{\xi - x}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

et, par suite, l'intégrale double écrite plus haut a un sens bien déterminé. On démontre d'ailleurs aisément qu'elle représente $\frac{\partial u}{\partial x}$.

Il est essentiel, pour la suite, d'obtenir une limite supérieure de $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|$. Or supposons d'abord que le contour C se réduise à un cercle. Dans ce cas, on a facilement la fonction G. Désignons par R le rayon du cercle, par a la distance du point (x, y) au centre du cercle; soit de plus (x_1, y_1) le conjugué de A_1 par rapport au cercle A. En appelant P le point arbitraire (ξ, η), on a

$$G = -\frac{1}{2}\log[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2] + \log\left(\frac{a.PA_1}{R}\right).$$

Nous voulons nous rendre compte que

$$\int\int\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta$$

a un maximum (fini), quand (x, y) décrit l'aire limitée par C. Or $\frac{\partial G}{\partial x}$ se compose de deux parties. En substituant chacun de ces deux termes, on voit immédiatement que cette intégrale reste toujours finie et ne dépasse pas une limite assignable, quelle que soit la position du point (x, y) dans l'aire considérée. Nous représenterons par N le maximum des deux intégrales dans cette aire

$$\int\int\left|\frac{\partial G}{\partial x}\right| d\xi\, d\eta, \quad \int\int\left|\frac{\partial G}{\partial y}\right| d\xi\, d\eta;$$

N tendra vers zéro, en même temps que l'aire.

Il en résulte que $\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial u}{dy}\right|$ sont moindres que FN.

Nous avons trouvé plus haut que $|u| < \mathrm{FM}$. Ainsi u et ses dérivées partielles du premier ordre ont leur module limité à l'aide du seul module maximum F de la fonction f; M et N sont indépendants de cette fonction, ils ne dépendent que du contour C, ils varient d'une manière continue avec ce contour, et tendent vers zéro en même temps que lui.

La même conclusion subsiste évidemment pour un contour quelconque, puisqu'une transformation conforme permet toujours de passer d'un tel contour à un cercle.

3. Revenons maintenant à la méthode d'approximations successives. Nous écrivons l'équation

$$\Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu \qquad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Conformément à ce que nous avons dit d'une manière générale, nous devons considérer les équations successives, où, pour simplifier, nous partons de $u_1 = 0$,

$$\begin{aligned}
&\Delta u_2 = 0,\\
&\Delta u_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\Delta u_n = a\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial u_{n-1}}{\partial y} + cu_{n-1}.
\end{aligned}$$

On intègre chaque équation en se donnant la valeur de l'intégrale le long d'un contour C: cette succession continue de valeurs est la même pour toutes les équations: u_2 est déterminée par la première équation; la fonction continue

$$a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$$

aura, dans l'aire limitée par C, un certain maximum, que nous désignerons par F. Nous pouvons aux équations précédentes substituer en posant

$$u_3 - u_2 = v_3, \qquad \ldots, \qquad u_n - u_{n-1} = v_n, \qquad \ldots,$$

$$\Delta v_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2,$$

$$\Delta v_4 = a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta v_n = a\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x} + b\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y} + cv_n.$$

Tous les v s'annulent sur le contour. On aura donc, d'après ce qui précède,

$$|v_3| < \mathrm{MF}, \qquad \left|\frac{\partial v_3}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v_3}{\partial y}\right| < \mathrm{NF}.$$

Soient maintenant A, B, C les valeurs absolues maxima de a, b, c; nous avons

$$\left|a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3\right| < (\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F}.$$

Par suite, on aura, pour v_4,

$$|v_4| < \mathrm{M}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F},$$

$$\left|\frac{\partial v_4}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v_4}{\partial y}\right| < \mathrm{N}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})\mathrm{F}.$$

Donc

$$\left|a\frac{\partial v_4}{\partial x} + b\frac{\partial v_4}{\partial y} + cv_4\right| < (\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^2\mathrm{F},$$

et il est clair qu'on aura, d'une manière générale,

$$|v_n| < \mathrm{M}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^{n-3}\mathrm{F},$$

$$\left|\frac{\partial v_4}{\partial x}\right| \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial v_4}{\partial y}\right| < \mathrm{N}(\mathrm{AN} + \mathrm{BN} + \mathrm{CM})^{n-3}\mathrm{F}.$$

Nous avons à chercher si u_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On voit qu'il en sera certainement ainsi si

$$AN + BN + CM < 1$$

et cette condition sera remplie si le contour est suffisamment petit, car M et N seront alors eux-mêmes très petits.

Supposons donc cette inégalité vérifiée; nous pouvons représenter la limite de u_n par la série

$$u = u_2 + v_3 + v_4 + \ldots + v_n + \ldots.$$

Ce sera une fonction continue de x et y, ayant des dérivées partielles du premier ordre, représentées, d'après ce qui précède, par les séries

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial v_3}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial x} + \ldots,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial v_n}{\partial y} + \ldots.$$

La fonction u prendra sur C les mêmes valeurs que u_2, c'est-à-dire la succession donnée de valeurs.

D'autre part, puisqu'on a d'une manière générale

$$u_n = -\frac{1}{2\pi}\int\int\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u_{n-1}}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)u\right] \times G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta,$$

on aura évidemment

$$(\alpha)\quad \left\{ u(x,y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int\left[a(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi,\eta)\frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi,\eta)u\right] \times G(\xi,\eta,x,y)\,d\xi\,d\eta.\right.$$

De là peut se conclure que la fonction $u(x,y)$ satisfait à l'équation

$$(\beta)\qquad \Delta u = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu,$$

mais c'est un point qui demande quelques explications.

4. Revenons un moment à l'équation

$$\Delta u = f(x, y)$$

considérée au n° 2. Nous avons rappelé qu'on trouvait l'intégrale de cette équation s'annulant sur le bord, à l'aide de la formule

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int f(\xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Cette fonction a des dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ dont nous avons donné la valeur; dans tout ceci, aucune hypothèse spéciale n'est à faire sur la fonction $f(x, y)$, si ce n'est qu'elle est continue. Il n'en est pas de même quand on veut aborder l'étude des dérivées secondes de la fonction u. On suppose généralement, en abordant ce point, que f a des dérivées partielles du premier ordre $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, elles-mêmes continues, et alors on établit sans peine l'existence des dérivées secondes et la relation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

A la vérité, l'hypothèse de l'existence des dérivées partielles n'est pas indispensable, et, d'après M. Hölder, que cite M. Harnack dans son Ouvrage *Sur le potentiel logarithmique*, il suffit, pour pouvoir arriver aux conclusions précédentes, que la valeur absolue de la différence $f(x_1, y_1) - f(x_0, y_0)$ soit moindre que Ar^μ, A et μ étant deux constantes positives, et r la distance de (x_1, y_1) et (x_0, y_0).

Quoi qu'il en soit, la seule continuité de la fonction $f(x, y)$ ne paraît pas suffisante pour établir que u a des dérivées secondes, et satisfait à l'équation $\Delta u = f$.

Nous ne pouvons donc, sans quelques hypothèses, passer de la relation (α) à la relation (β) du précédent paragraphe.

Dans le cas où $f(x, y)$ a des dérivées continues dans C et intégrables, on établit, avons-nous dit, que la fonction $u(x, y)$ a des dérivées du second ordre, continues dans C, et satisfaisant à l'équation $\Delta u = f$. J'ajoute que ces dérivées secondes restent continues, même quand le

point (x, y) s'approche indéfiniment d'un point du contour C : c'est ce qu'on vérifiera facilement pour le cas où C est un cercle; car alors la fonction G s'exprime, comme nous l'avons vu, à l'aide de logarithmes. De plus, on peut trouver une limite pour les valeurs absolues des dérivées secondes de u; en désignant, comme plus haut, par F la valeur absolue maxima de $f(x, y)$ et en appelant F_1 la valeur absolue maxima de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$, on aura, pour limite supérieure des valeurs des dérivées secondes,

$$\lambda F + M_1 F_1.$$

λ et M_1 sont deux quantités positives qui ne dépendent pas de la fonction f; la *seconde* tend vers zéro quand la courbe C tend vers zéro.

Ceci posé, revenons à la succession des équations donnant u_2, v_3, v_4, ...; nous supposerons que u_2 et ses dérivées partielles, premières et secondes, sont continues à l'intérieur de C et sur C. Nous calculons alors v_3 au moyen de l'équation

$$\Delta v_3 = a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2.$$

Pour pouvoir affirmer que v_3 a des dérivées secondes jouissant de la propriété indiquée, il faut que le second membre ait des dérivées premières; d'où l'hypothèse nécessaire, que a, b, c aient des dérivées partielles du premier ordre continues.

Cherchons à avoir une limite des dérivées secondes de v_3, v_4, ..., v_n.

Soient F le module maximum de $a\frac{\partial u_2}{\partial x} + b\frac{\partial u_2}{\partial y} + cu_2$, et F_1 celui de ses dérivées du premier ordre; nous aurons, d'après ce qui précède,

$$|v_3| < MF, \qquad \left|\frac{\partial v_3}{\partial x}\right| < NF, \qquad \left|\frac{\partial^2 v_3}{\partial x^2}\right| < \lambda F + M_1 F_1.$$

Passons à v_4, qui satisfait à l'équation

$$\Delta v_4 = a\frac{\partial v_3}{\partial x} + b\frac{\partial v_3}{\partial y} + cv_3.$$

Le second membre de cette équation a pour limite supérieure

l'expression déjà considérée

$$(AN + BN + CM)F,$$

et pour ses dérivées premières une expression de la forme

$$F(\lambda A' + NB' + MC') + M_1 D' F_1,$$

A', B', C', D' étant des constantes ne dépendant que des limites supérieures de a, b, c et de leurs dérivées premières.

On passera donc des limites supérieures de v_3 et de ses dérivées premières et secondes aux limites relatives à v_n, en remplaçant F et F_1 respectivement par

$$(AN + BN + CM)F,$$
$$(\lambda A' + NB + MC')F + M_1 D' F_1.$$

Désignons cette substitution linéaire par

$$(F, F_1, \alpha F, aF + \beta F_1).$$

Il faudra faire n fois la substitution, pour obtenir les limites relatives à v_{n+3} et à ses dérivées premières et secondes. Par suite, la limite supérieure pour les dérivées secondes de v_{n+3} sera

$$\lambda\alpha^n F + M_1[aF(\alpha^n + \alpha^{n-1}\beta + \alpha^{n-2}\beta^2 + \ldots + \beta^n) + \beta^{n-1} F_1].$$

Or α et β sont très petits, si le contour est suffisamment petit. La série dont le terme général est

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 v_n}{\partial y^2}$$

sera donc convergente, si α et β sont moindres que l'unité. Il en résulte que la fonction $u(x, y)$ a des dérivées secondes, elles-mêmes continues dans l'aire C; par suite, la fonction

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu$$

a des dérivés premières; et de la relation

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\left(a\frac{\partial u}{\partial \xi} + b\frac{\partial u}{\partial \eta} + cu\right) d\xi\, d\eta,$$

nous pouvons enfin conclure, en toute rigueur,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} + cu.$$

5. On voit que la présence des dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$ entraîne à quelques longueurs dans la démonstration, surtout pour le dernier point. Dans le cas où l'équation se réduit à

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = cu,$$

le paragraphe précédent est inutile; car de la relation

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\, c(\xi, \eta)\, u(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

on peut, cette fois, conclure à l'équation différentielle, si l'on suppose que la fonction $c(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre.

II. — Équations non linéaires.

6. Examinons maintenant, d'une manière plus générale, les équations

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right)$$

et cherchons ce que donneront les approximations successives. Nous considérons les équations

$$\Delta u_2 = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\Delta u_3 = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\Delta u_n = F\left(u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, x, y\right).$$

On peut, sans diminuer la généralité, supposer que nous fassions toutes les intégrations successives, en supposant que u s'annule sur le contour. Pour bien fixer les idées, nous supposerons d'abord que, (x, y) restant dans une certaine région du plan, la fonction

$$F(u, v, w, x, y),$$

reste finie et bien déterminée quand u, v, w restent compris entre $-L$ et $+L$, L étant une certaine constante positive. Dans ces conditions la fonction F a un certain maximum μ; les valeurs absolues de u_2, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ seront moindres que μM, et μN (M et N ayant les mêmes significations qu'au n° **2**). On part évidemment d'une fonction u_1, pour laquelle u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ restent compris entre $-L$ et $+L$. Si donc

$$\mu M < L, \qquad \mu N < L.$$

u_2, $\frac{\partial u_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y}$ seront compris entre $-L$ et $+L$: or M et N tendent vers zéro avec le contour C. En prenant celui-ci assez petit, nous pouvons donc supposer les inégalités précédentes vérifiées: on en conclut, de proche en proche, que, pour toute valeur de n,

$$u_n, \quad \frac{\partial u_n}{\partial x} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u_n}{\partial y}$$

seront compris entre $-L$ et $+L$.

Ceci posé, considérons les équations

$$\Delta u_2 = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right).$$

$$\Delta v_3 = F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right).$$

.....

$$\Delta v_n = F\left(u_{n-1}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-1}}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_{n-2}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial x}, \frac{\partial u_{n-2}}{\partial y}, x, y\right).$$

en posant

$$v_3 = u_3 - u_2, \qquad \ldots \qquad v_n = u_n - u_{n-1}.$$

Or introduisons ici une nouvelle hypothèse sur la fonction

$$F(u, v, w, x, y):$$

je supposerai que, pour deux systèmes de valeurs

$$(u_1, v_1, w_1), \quad (u_2, v_2, w_2)$$

compris dans l'intervalle $(-L, +L)$, on puisse déterminer trois constantes positives A, B, C, telles que

$$\begin{aligned} &|F(u_2, v_2, w_2, x, y) - F(u_1, v_1, w_1, x, y)| \\ &\quad < A|u_2 - u_1| + B|v_2 - v_1| + C|w_2 - w_1|. \end{aligned}$$

Cette condition sera évidemment remplie, en particulier, si la fonction F a des dérivées partielles par rapport à u, v, w.

Le second membre de l'équation, donnant d'une manière générale Δv_n, sera donc moindre alors, en valeur absolue, que

$$A|v_{n-1}| + B\left|\frac{\partial v_{n-1}}{\partial x}\right| + C\left|\frac{\partial v_{n-1}}{\partial y}\right|.$$

Il n'y a, par suite, rien à changer aux raisonnements faits précédemment pour établir que v_n tend vers zéro et que la série

$$u_2 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$$

est convergente, si le contour est suffisamment petit, c'est-à-dire que u_n tend, dans ces conditions, vers une limite u.

Cette fonction $u(x, y)$ a des dérivées partielles du premier ordre; pour établir qu'elle a des dérivées du second ordre, on procédera encore comme plus haut; mais il faut faire l'hypothèse que

$$F(u, v, w, x, y)$$

a des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux cinq lettres dont elle dépend. On conclura enfin de là que

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

Nous devons ajouter une remarque importante. On vient de trouver une intégrale de l'équation

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right),$$

continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, à l'intérieur de C, et prenant sur C une succession continue donnée de valeurs; mais nous n'avons pas démontré ici, d'une manière générale, que cette solution est unique, même si le contour est suffisamment petit.

Ici encore, comme dans le cas des équations linéaires, un cas très simple est celui où F ne dépend que de u, x, y. Arrêtons-nous un moment sur cette équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

qui fera, dans un autre Chapitre, l'objet d'un examen approfondi.

On a dit que la limite de u_n tendait vers une limite $u(x, y)$, qui a des dérivées partielles du premier ordre. Cette équation satisfait à la relation

$$u(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(\xi, \eta, x, y)\, F[u(\xi, \eta), \xi, \eta]\, d\xi\, d\eta.$$

De là se conclut que $u(x, y)$ a des dérivées partielles du second ordre, si l'on suppose que $\frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial F}{\partial x}$ et $\frac{\partial F}{\partial y}$ existent. Ajoutons que, si F a des dérivées partielles secondes, $u(x, y)$ aura des dérivées partielles troisièmes continues dans l'aire limitée par C, et, d'une manière générale, si F a des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $n-1$, la fonction $u(x, y)$ aura des dérivées partielles jusqu'à l'ordre n continues dans C. Cette remarque nous sera utile dans la suite; elle se démontre immédiatement en intégrant successivement par parties sous le signe d'intégration.

CHAPITRE II.

ÉQUATIONS DU TYPE (B).

1. Parmi les équations (B), il suffira de considérer l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz;$$

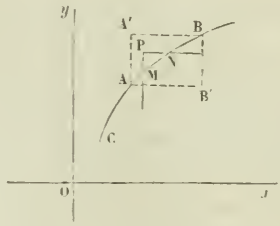
car, cette équation une fois traitée, il suffirait de reprendre les mêmes raisonnements que plus haut, pour traiter de l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F\left(z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, x, y\right).$$

Il ne peut être question ici de déterminer une intégrale par ses valeurs le long d'un contour fermé; nous avons à étudier la méthode d'approximations successives, au point de vue de la détermination de l'intégrale générale.

Considérons dans le plan (Ox, Oy) un arc d'une courbe quelconque

Fig. 1.



C (*fig.* 1), pour lequel nous supposons seulement qu'une quelconque des coordonnées est une fonction continue de l'autre, et variant toujours dans le même sens. Nous voulons obtenir l'intégrale de l'équation (1) pour laquelle les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent sur C une succession

donnée de valeurs, et qui en un point A de C prend une valeur donnée α.

On traitera d'abord le problème pour l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

ce qui sera immédiat. Soit z_1 cette solution; on doit considérer alors l'équation

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1.$$

On cherchera l'intégrale de cette équation en z_2, pour laquelle $\frac{\partial z_2}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_2}{\partial y}$ s'annulent sur C et qui s'annule elle-même en A. On considérera ensuite l'équation en z_3

$$\frac{\partial^2 z_3}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + c z_2,$$

que l'on intégrera dans les mêmes conditions, et l'on continuera ainsi indéfiniment. Il s'agit maintenant d'étudier la série

$$(2) \qquad z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_n + \ldots$$

et de voir si elle donne la solution du problème proposé. Cette façon de procéder ne diffère évidemment que par la notation de celle à laquelle conduisent les approximations successives indiquées dans l'Introduction.

2. Remarquons auparavant que la solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0$$

est immédiate si, *sur* C, on se donne $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ en fonction de x, et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ en fonction de y.

Soient $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ ces deux fonctions. On aura évidemment

$$z_1 = z_0 + \int_{x_0}^{x} \varphi(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} \psi(y)\,dy,$$

en désignant par x_0 et y_0 les coordonnées de A.

Soit, d'autre part, l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F(x, y),$$

où F est une fonction continue de x et y. L'intégrale de cette équation s'annulant en A, et pour laquelle $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ sont nulles sur C, peut se représenter de la manière suivante : soit P un point de coordonnées x et y; menons par ce point des parallèles aux axes rencontrant la courbe en M et N : l'intégrale cherchée sera représentée par l'intégrale double

$$-\int\int F(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta,$$

étendue au triangle curviligne PMN.

On suppose, comme je l'ai déjà dit, que de A en B sur l'arc C une quelconque des coordonnées est fonction continue de l'autre et variant toujours dans le même sens (en croissant, dans le cas de la figure).

Ceci posé, supposons que le point P reste dans le rectangle ABA'B', et soient $AB' = \alpha$, $BB' = \beta$; nous allons chercher une limite supérieure des différents termes de la série (2). Désignons par M la valeur absolue maxima de

$$a\frac{\partial z_1}{\partial y} + b\frac{\partial z_1}{\partial y} + c z_1,$$

dans le rectangle ABA'B'. On aura alors

$$|z_2| < M\alpha\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right| < M\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right| < M\alpha.$$

Soient d'autre part A, B, C les valeurs absolues maxima des fonc-

tions a, b, c dans le même rectangle, il en résulte que

$$\left| a\frac{\partial z_2}{\partial x} + b\frac{\partial z_2}{\partial y} + c z_2 \right| < M[A\beta + B\alpha + C\alpha\beta].$$

Par conséquent

$$|z_3| < M[A\beta + B\alpha + C\alpha\beta]\alpha\beta, \qquad \left|\frac{\partial z_3}{\partial x}\right| < M[A\beta + B\alpha + C\alpha\beta]\beta.$$

En continuant ainsi, on arrive d'une manière générale à

$$|z_n| < M[A\beta + B\alpha + C\alpha\beta]^{n-1}\alpha\beta.$$

Il s'ensuit que les termes de la série (2) peuvent être comparés à ceux d'une progression géométrique; si donc

$$(3) \qquad A\beta + B\alpha + C\alpha\beta < 1,$$

la série (2) et les deux séries

$$\frac{\partial z_1}{\partial x} + \frac{\partial z_2}{\partial x} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial x} + \ldots$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial y} + \frac{\partial z_2}{\partial y} + \ldots + \frac{\partial z_n}{\partial y} + \ldots$$

convergeront. Quant à la condition (3), elle sera évidemment vérifiée, si le point B est pris suffisamment voisin de A. Les séries convergeront à l'intérieur du rectangle ABA'B'. La fonction z limite de la série $z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$ aura évidemment des dérivées partielles du premier ordre, et la dérivée seconde $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$; de plus elle satisfera à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz.$$

3. Ainsi, sous les hypothèses faites, nous avons pour l'équation aux dérivées partielles proposée une intégrale z qui prend en un point A de la courbe une valeur donnée, et pour laquelle les dérivées partielles

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent respectivement sur C une succession continue donnée de valeurs. Ces fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(y)$ de notre analyse ne sont assujetties qu'à la seule condition d'être continues. *Remarquons que* z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ *sont des fonctions continues de* x *et* y, *même quand on traverse l'arc* C; il y a là un point intéressant de la théorie des équations aux dérivées partielles sur lequel il est bon d'insister. Une intégrale z d'une équation linéaire du second ordre aux dérivées partielles est, dit-on d'une manière générale, déterminée quand on se donne les valeurs de z et de $\frac{\partial z}{\partial x}$ sur une courbe C ou, ce qui revient au même, les valeurs de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et de $\frac{\partial z}{\partial y}$ sur cette courbe et la valeur de z en un point particulier de C. Mais cette conception générale de l'intégrale n'est valable que pour une courbe C tracée dans une région du plan où les caractéristiques sont réelles, c'est-à-dire que dans ce cas, seulement, on est assuré d'avoir une intégrale satisfaisant aux conditions données, et continue ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre quand on traverse l'arc C; notre analyse précédente montre bien nettement que z, $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ restent continues au passage par C. Il en est tout autrement quand les caractéristiques sont imaginaires. Il suffira, pour le voir, de prendre l'exemple simple de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Il ne peut y avoir, en général, de solution de cette équation, continue dans le rectangle ABA'B', ainsi que ses dérivées partielles du premier ordre, et pour laquelle $\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ prennent sur l'arc AB la succession de valeurs désignées plus haut par $\varphi(x)$ et $\psi(y)$, ces dernières fonctions n'étant assujetties qu'à la condition d'être continues. On pourrait, en effet, dans le cas contraire, former une fonction analytique

$$z + iz_1,$$

qui serait holomorphe dans le rectangle considéré; la partie réelle de

cette fonction serait arbitraire sur l'arc de courbe AB, ce qui est impossible, puisqu'une fonction holomorphe déterminée sur un arc de courbe, si petit qu'il soit, ne peut être étendue que d'une seule manière.

Ainsi la démonstration, qui vient d'être donnée relativement à l'existence de l'intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

et à son développement en série, permet d'aborder une question qu'on laisse nécessairement de côté, quand on suppose que a, b, c sont des fonctions analytiques et que les conditions aux limites sont exprimées aussi au moyen de fonctions analytiques.

4. L'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz$$

a fait l'objet d'un très remarquable Chapitre de M. Darboux, dans ses *Leçons sur la théorie des surfaces* (t. II, Chap. IV). Suivant une idée de Riemann, M. Darboux ramène l'intégration de cette équation à la recherche d'une solution particulière z; cette intégrale z est déterminée par cette condition de se réduire pour $x = x_0$ à une fonction donnée $\psi(y)$, et pour $y = y_0$ à une fonction donnée $\varphi(x)$. M. Darboux établit l'existence d'une telle solution, en supposant que a, b, c sont des fonctions *analytiques* de x et y, ainsi que φ et ψ, et il se sert, comme intermédiaire, d'une équation célèbre considérée par Euler et Poisson. En restant à notre point de vue des approximations successives, la démonstration de l'existence d'une telle solution z est bien facile, sans faire d'ailleurs sur a, b, c, φ et ψ d'autre hypothèse que celle de la continuité. [On a évidemment $\varphi(x_0) = \psi(y_0)$, et l'on suppose que φ et ψ ont des dérivées premières.]

Partons de

$$\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

en l'intégrant avec les conditions données, d'où

$$z_1 = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(x_0).$$

Il faut ensuite, d'une manière générale, trouver une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = f(x, y),$$

f étant une fonction connue, et telle que z_n s'annule pour $x = x_0$, quel que soit y, et pour $y = y_0$ quel que soit x. Cette solution est donnée par

$$z_n = \int_{x_0}^{x} \int_{y_0}^{y} f(x, y) dx\, dy.$$

Soit M le module maximum de z_1, $\frac{\partial z_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ dans un rectangle, parallèle aux axes, ayant pour centre (x_0, y_0) et des côtés de longueurs α et β: le module de $a\frac{\partial z_1}{\partial x} + b\frac{\partial z_1}{\partial x} + cz_1$ sera moindre que KM. Donc on a pour $|z_2|$, $\left|\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|$ la limite supérieure

$$KM\alpha\beta.$$

On aura pareillement pour $|z_3|$, $\left|\frac{\partial z_3}{\partial x}\right|$ et $\left|\frac{\partial z_3}{\partial y}\right|$ la limite supérieure

$$K^2 M(\alpha\beta)^2$$

et, pour $|z_n|$ et ses dérivées du premier ordre

$$M(K\alpha\beta)^n.$$

On en conclut la convergence de la série

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_n + \ldots$$

et de ses dérivées du premier ordre, si $K\alpha\beta < 1$, ce qui est vérifié si le rectangle est suffisamment petit. La démonstration est donc complète, sans qu'il soit nécessaire d'insister davantage.

CHAPITRE III.

I. — De l'équation $\Delta u = F(u, x, y)$.

Le théorème démontré au début du Chapitre I est relatif au cas où l'aire considérée est suffisamment petite. Occupons-nous maintenant de classes d'équations où ce théorème soit exact sans restriction. Reprenons l'équation

$$\Delta u = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, x, y\right).$$

1. Voici un cas étendu dans lequel il ne pourra y avoir plus d'une intégrale continue prenant une succession de valeurs sur un contour. Soient u_1 et u_2 deux telles intégrales; on aura

$$\frac{\partial^2(u_1 - u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(u_1 - u_2)}{\partial y^2} = F\left(u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}, x, y\right) - F\left(u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}, x, y\right),$$

ce qui peut s'écrire, en posant $u_1 - u_2 = v$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = {} & F'_u(u_3, v_3, w_3, x, y)\, v \\ & + F'_v(u_3, v_3, w_3, x, y)\frac{\partial v}{\partial x} + F'_w(u_3, v_3, w_3, x, y)\frac{\partial v}{\partial y},\end{aligned}$$

en désignant par u_3, v_3, w_3 des quantités intermédiaires respectivement entre u_1 et u_2, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$ et $\frac{\partial u_2}{\partial y}$. Nous pouvons considérer les coefficients de v, $\frac{\partial v}{\partial x}$ et $\frac{\partial v}{\partial y}$ comme des fonctions de x et y, et nous avons

alors une équation linéaire en v, avec une intégrale v qui s'annule sur le bord. Cette intégrale sera nécessairement nulle, d'après le n° **1** du Chapitre I, si l'on a

$$4F_u(u, v, w, x, y) > [F_v(u, v, w, x, y)]^2 + [F_w(u, v, w, x, y)]^2,$$

quels que soient u, v, w, et pour toute valeur de x et y dans la région considérée du plan. En particulier, si F ne renferme pas $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y}$, cette relation exprimera que F croît toujours avec u. Nous allons donc considérer spécialement l'équation suivante :

$$(1) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(u, x, y),$$

F étant une fonction de u, x et y, sur laquelle diverses hypothèses doivent être faites. Nous supposons d'abord que la fonction F soit bien déterminée et finie pour toute valeur réelle de u, x et y, et qu'elle soit *positive;* de plus elle *croît* toujours avec u.

Dans ces conditions, je vais d'abord démontrer d'une seconde manière qu'*il ne peut y avoir deux intégrales de cette équation, continues ainsi que leurs dérivées dans un contour* C, *et prenant sur ce contour la même succession de valeurs.* Supposons, en effet, qu'il existe deux intégrales u_1 et u_2; la différence $u_1 - u_2$ s'annule sur C, et, si elle ne garde pas un signe invariable à l'intérieur de l'aire, on peut fractionner celle-ci en plusieurs parties sur le bord desquelles elle s'annulera en gardant le même signe à l'intérieur. Soit Γ un tel contour; on aura

$$\Delta(u_1 - u_2) = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y)$$

Or nous avons déjà rappelé que, si l'on considère l'équation

$$\Delta v + \varphi(x, y) = 0,$$

l'intégrale v de cette équation, s'annulant sur un contour Γ, est donnée par la formule

$$v = \frac{1}{2\pi} \int\int \varphi(\xi, \eta) G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta;$$

nous aurons donc ici

$$u_1 - u_2 = \frac{1}{2\pi}\int\int [F(u_2, x, y) - F(u_1, x, y)]\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta;$$

mais $u_2 - u_1$ a un signe invariable à l'intérieur de Γ, soit, par exemple, le signe *plus*. Or, puisque par hypothèse

$$F(u_2) > F(u_1) \qquad \text{quand} \qquad u_2 > u_1,$$

on voit que le premier membre de l'égalité précédente sera *négatif*, tandis que le second est *positif;* cette contradiction démontre le théorème.

Ceci posé, cherchons à obtenir la solution prenant une succession continue donnée de valeurs sur C en ajoutant maintenant l'hypothèse, inutile dans les lignes précédentes, que F est toujours positif. Nous pouvons toujours commencer par résoudre le problème pour l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, soit h la solution. Si l'on remplace u par $u + h$ dans l'équation (1), elle gardera la même forme, la fonction F ayant seulement changé, et la nouvelle fonction u s'annulant sur le contour. Nous pouvons donc partir de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

en nous proposant de trouver l'intégrale qui s'annule sur le contour C.

Je considère alors les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} \Delta S_1 = F(0, x, y), \\ \Delta S_2 = F(S_1, x, y), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \Delta S_n = F(S_{n-1}, x, y). \end{cases}$$

On forme, comme il a été rappelé plus haut, la solution de la première qui s'annule le long de C; S_1 obtenu, on intègre la seconde équation dans les mêmes conditions, et ainsi de suite.

Il est d'abord manifeste que toutes les quantités S seront négatives

à l'intérieur de C; de plus on aura

$$0 > S_2 > S_1,$$
$$S_1 < S_3 < S_2,$$
$$S_2 > S_4 > S_3,$$

et ainsi de suite, le sens des inégalités entre trois S consécutifs variant d'une ligne à la suivante. Ces inégalités se déduisent de la formule

$$S_n = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(S_{n-1}, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

Il en résulte que les S à indices impairs forment une suite croissante, les S à indices pairs forment une suite décroissante; d'autre part, tout terme de la première suite est inférieur à un terme quelconque de la seconde. Les S à indices impairs auront donc une limite u, et les S à indices pairs une limite v. Ces deux limites sont des fonctions de x et y, nécessairement continues; elles s'annulent toutes deux sur C et pour tout point de l'intérieur du contour, on a

$$u \leqq v;$$

u peut être considéré comme la limite de la série

$$S_1 + (S_3 - S_1) + (S_5 - S_3) + \ldots.$$

On a d'ailleurs

$$u = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(v, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta,$$

v, sous le signe d'intégration, étant fonction de ξ et η, et aussi

$$v = -\frac{1}{2\pi}\int\int F(u, \xi, \eta)\, G(\xi, \eta, x, y)\, d\xi\, d\eta.$$

On en conclut que u et v ont, à l'intérieur du contour, des dérivées partielles du premier ordre, et ensuite des dérivées partielles de tout ordre jusqu'au rang n si F a des dérivées partielles jusqu'au rang $n-1$, par rapport aux trois lettres dont elle dépend.

Comme, d'autre part, on a

$$\Delta S_n = F(S_{n-1}, x, y), \qquad \Delta S_{n+1} = F(S_n, x, y),$$

nous en concluons que *u et v sont deux fonctions de x et y s'annulant sur le contour, et satisfaisant aux deux équations*

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta u = F(v, x, y), \\ \Delta v = F(u, x, y). \end{cases}$$

2. On voit que *l'emploi des approximations successives ne nous conduit pas à la solution du problème proposé*, c'est-à-dire à la recherche de l'intégrale de l'équation (1) s'annulant sur le contour; car, au lieu d'une seule équation, nous avons le système des équations (3).

Cependant la question serait résolue si l'on avait $u = v$. Or je dis qu'il en sera ainsi, non pas nécessairement en général, mais *si le contour* C *est suffisamment petit*. Reprenons à cet effet les équations (2); elles donnent

$$\Delta(S_n - S_{n-1}) = F(S_{n-1}, x, y) - F(S_{n-2}, x, y);$$

or on peut écrire

$$F(S_{n-1}, x, y) - F(S_{n-2}, x, y) = (S_{n-1} - S_{n-2}) F'_S(\Sigma, x, y),$$

Σ étant compris entre S_{n-1} et S_{n-2}; d'ailleurs, d'après l'hypothèse faite sur F, la dérivée F'_S est toujours positive. Lorsque S varie entre 0 et S_1, F'_S a un certain maximum, et ce maximum dépendant de x et y a lui-même un maximum M, quand (x, y) se déplace dans l'aire C. Ceci posé, considérons les équations

$$\begin{aligned} \Delta u_0 &= F(0, x, y), \\ \Delta u_1 &= M u_0, \\ \Delta u_2 &= M u_1, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Delta u_n &= M u_{n-1}, \end{aligned}$$

chaque équation étant intégrée avec la condition que tous les u sont nuls sur le bord du contour. On aura évidemment

$$|S_n - S_{n-1}| < |u_n|.$$

Or, si le contour C est suffisamment petit, nous avons vu (n° 5, Chap. Ier) que la série des u était convergente. Par conséquent

$$\lim(S_n - S_{n-1}) = 0.$$

c'est-à-dire que $u = v$.

Nous avons alors l'intégrale de l'équation

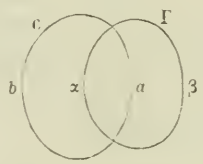
$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant sur le bord du contour.

5. Le problème proposé n'est résolu par ce qui précède que pour un contour suffisamment petit; nous allons passer maintenant à un contour quelconque. Nous nous proposons, à cet effet, de montrer que *le problème, étant traité pour deux contours ayant une partie commune, pourra être résolu pour le contour limitant extérieurement l'ensemble des deux aires.*

Soient C et Γ (*fig.* 2) les deux contours. Désignons par a la partie de C

Fig. 2.



comprise dans Γ, et par b la partie extérieure; de même appelons α la partie de Γ comprise dans C, et β la partie extérieure.

Nous allons commencer par démontrer deux lemmes :

1° Soient deux fonctions u et v pour lesquelles on a

$$\Delta u = F(u, x, y), \qquad \Delta v = F(v, x, y).$$

Si sur le bord d'un contour fermé C on a $u \geqq v$, je dis qu'il en sera de même à l'intérieur. Si, en effet, $u - v$ devient négatif, le changement de signe se fera le long d'une courbe fermée (qui pourra avoir des points communs avec le bord). A l'intérieur de cette courbe on devra avoir $u = v$, puisque nous avons vu qu'il ne pouvait y avoir plus d'une intégrale prenant des valeurs données sur un contour; par conséquent on a toujours : soit $u = v$, soit $u > v$. C. Q. F. D.

2° Considérons encore l'équation $\Delta u = F$: l'intégrale de cette équation s'annulant sur le contour C sera évidemment négative à l'intérieur : on envisage de plus l'intégrale v de l'équation

$$\Delta v = F(0, x, y)$$

s'annulant sur C, on aura

$$|u| < |v|,$$

puisque $F(u_1, x, y) < F(0, x, y)$ quand u est négatif. Si donc M désigne la valeur absolue maxima de v, on aura

$$|u| < M.$$

Ceci posé, prenons une intégrale de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

qui s'annule sur b et prenne sur a des valeurs négatives dont la valeur absolue ne dépasse pas M, nous voulons trouver *une limite de la valeur absolue de u sur une courbe α*, joignant les deux extrémités de a, et qui ne soit pas tangente en ces extrémités à la courbe C.

A cet effet, je désigne par h l'intégrale de l'équation

$$\Delta h = 0$$

qui prend sur a et b les valeurs indiquées. D'après une remarque fondamentale faite par M. Schwarz dans ses beaux travaux *Sur l'équation de Laplace*, on a, *sur* α,

$$|h| < Mq,$$

q désignant un nombre plus petit que l'unité.

Posons alors $u = U + h$, nous aurons l'équation

$$\Delta U = F(U + h, x, y)$$

et nous devons considérer l'intégrale de cette équation en U qui s'annule sur C. U sera négatif, et, comme h est négatif, on aura, *a fortiori*

$$|U| < M.$$

Nous en concluons, et c'est là notre second lemme

$$|u| < Mq + M,$$

inégalité qui va jouer le rôle essentiel.

J'arrive maintenant à la solution du problème proposé; il s'agit de montrer que l'on saura trouver la solution de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant sur b et β, si l'on sait intégrer l'équation précédente avec des conditions données aux limites pour les courbes C et Γ.

Soit u_1 la fonction déterminée dans C et s'annulant sur cette courbe; nous formons alors la fonction v_1 déterminée dans Γ, s'annulant sur β, et prenant sur α les mêmes valeurs que u_1. Revenant maintenant au premier contour, formons la fonction u_2 déterminée dans C, s'annulant sur b, et prenant sur a les mêmes valeurs que v_1, et continuons ainsi indéfiniment en passant successivement d'un contour à l'autre. Nous obtiendrons de cette manière deux suites

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots,$$

sur lesquelles on peut faire les remarques suivantes :

u_1 est négatif dans C, donc v_1 est négatif sur α et par suite sur a; donc, si nous revenons à u_2, on aura (premier lemme)

$$u_1 > u_2$$

et, en continuant ainsi, il vient évidemment

$$0 > u_1 > u_2 > \ldots > u_n > \ldots.$$
$$0 > v_1 > v_2 > \ldots > v_n > \ldots.$$

Il faut montrer que u_n et v_n tendent vers une limite; il suffira de faire voir que $|u_n|$ et $|v_n|$ restent inférieurs à un nombre fixe. C'est ce que va nous donner facilement le second lemme.

Nous avons

Sur α.... $|u_1| < M$;
Sur a.... $|v_1| < Mq + M$;
Sur α.... $|u_2| < q(Mq + M) + M = M(q^2 + q + 1)$;
Sur a.... $|v_2| < qM(q^2 + q + 1) + M = M(q^3 + q^2 + q + 1)$

et, d'une manière générale :

Sur α.... $|u_n| < M(q^{2n-2} + q^{2n-3} + \ldots + 1)$;
Sur a.... $|v_n| < M(q^{2n-1} + q^{2n-2} + \ldots + 1)$,

en désignant par M la valeur absolue maxima des intégrales de l'équation

$$\Delta u = F(0, x, y)$$

s'annulant respectivement sur C et Γ; q, qui est moindre que l'unité, désigne le plus grand des deux nombres de même nom correspondant respectivement à C et à la courbe α, à Γ et à la courbe a.

Les inégalités précédentes montrent que u_n et v_n tendent vers deux limites u et v. Ces limites u et v sont des fonctions continues de x et y, ayant respectivement dans C et Γ des dérivées partielles de tout ordre : c'est ce qu'on voit de suite en recourant aux expressions de u et v comme limite d'une série d'intégrales définies. Les fonctions u et v satisfont à l'équation proposée. Je dis que u et v prennent les mêmes valeurs sur a et α; en effet v_n prend les mêmes valeurs que u_n sur α, et u_{n+1} prend les mêmes valeurs que v_n sur a. Donc, à la limite, v prend les mêmes valeurs que u sur a et α. Il en résulte que, dans l'aire commune aux deux contours, on a

$$u = v.$$

Nous avons donc l'intégrale de l'équation proposée s'annulant sur b et β; elle est représentée par u à l'intérieur de C, et par v à l'intérieur de Γ.

La recherche de l'intégrale de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y),$$

prenant des valeurs données sur un contour quelconque peut être considérée comme complètement effectuée par l'analyse qui précède.

On ne doit pas oublier seulement les hypothèses faites sur la fonction $F(u, x, y)$; je les rappelle. La fonction $F(u, x, y)$ est positive pour toute valeur de u, et pour toute valeur de x et y dans la région considérée du plan; de plus la fonction F est constamment croissante avec u.

Un cas particulier, très simple et fort intéressant, sur lequel nous revenons plus loin, est celui de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = A(x, y)\, e^u,$$

$A(x, y)$ étant positif dans la région du plan où restera le point (x, y). Mais, avant de considérer cette équation, montrons que la méthode employée dans les précédents paragraphes peut réussir quand les conditions indiquées pour F sont un peu différentes.

4. Nous supposons toujours que F croisse avec u; mais nous allons supposer que $F(u, x, y)$ s'annule pour $u = 0$, de telle sorte que cette fonction sera négative quand u sera négatif. Dans ces conditions, l'intégrale de l'équation

$$\Delta u = F(u, x, y)$$

s'annulant le long d'un contour sera évidemment $u = 0$.

Si l'on a deux intégrales u_1 et u_2, telles que sur un contour C on ait

$$u_1 > u_2,$$

il en sera de même à l'intérieur. Le raisonnement est toujours le même;

car, dans le cas contraire, on aurait nécessairement une région à l'intérieur de laquelle u_1 serait moindre que u_2, ces deux quantités étant égales sur le bord; or ceci est impossible, d'après l'équation

$$\Delta(u_1 - u_2) = F(u_1, x, y) - F(u_2, x, y).$$

En particulier, si une intégrale u est positive en tous les points d'un contour, elle sera positive à l'intérieur de ce contour, puisqu'elle doit être supérieure à l'intégrale $u = 0$. Si, de plus, g est le maximum des valeurs sur le contour, u sera moindre que g à l'intérieur.

Ceci posé, nous allons montrer que l'on peut employer le procédé alterné, si les valeurs données le long du contour sont *positives*. Reprenons les deux contours C et Γ considérés dans le précédent paragraphe; les fonctions

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

auxquelles conduit l'application de la méthode sont ici toutes positives. Pour un point quelconque à l'intérieur, on a

$$u_1 < u_2 < u_3 < \ldots < u_n < \ldots,$$
$$v_1 < v_2 < v_3 < \ldots < v_n < \ldots.$$

Si g est le maximum des valeurs positives données sur le contour, les u_n et les v_n sont moindres que g; on a, par suite, deux limites u et v pour u_n et v_n. De plus, u_n et v_n sont égaux sur α (voir *fig.* 2), et u_{n-1} prend les mêmes valeurs que v_n sur a; donc u et v prennent les mêmes valeurs sur α et a. Ils coïncident donc dans la partie intermédiaire.

Il est évident qu'on peut faire les mêmes raisonnements en supposant que les valeurs données sur le bord sont négatives.

L'équation suivante

$$\Delta u = p \cdot u,$$

où p est une fonction positive de x et y, rentre dans le cas que nous venons d'examiner. Je l'ai traité directement dans le Mémoire déjà cité des *Acta mathematica* (t. XII).

5. Outre ces cas très généraux, les méthodes précédentes peuvent réussir, dans certains cas particuliers, pour d'autres équations. Prenons, par exemple, l'équation

$$\Delta u = A e^{u} - B e^{-u},$$

où l'on suppose que A et B sont des fonctions continues et positives de x et y dans une certaine région du plan, et que de plus $A > B$. On peut encore démontrer qu'il ne peut exister deux intégrales prenant les mêmes valeurs sur un contour C. On raisonnera pour cela comme précédemment, ce qui est possible, puisque la fonction

$$A e^{u} - B e^{-u},$$

croît toujours avec u. Cherchons alors l'intégrale de l'équation s'annulant sur C. Nous formons, comme plus haut, les équations

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= A - B,\\
\Delta S_2 &= A e^{S_1} - B e^{-S_1},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta S_n &= A e^{S_{n-1}} - B e^{-S_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Si, pour tous les points de l'aire limitée par C, on a

$$A e^{S_1} - B e^{-S_1} > 0,$$

c'est-à-dire

$$e^{2S_1} > \frac{B}{A},$$

on pourra faire la même succession de raisonnements que précédemment. Les S à indices pairs et les S à indices impairs auront respectivement deux limites u et v. *On voit qu'il y a ici une condition complémentaire,* que nous n'avions pas tout à l'heure. D'ailleurs, si le contour C est suffisamment petit, S_1 sera très voisin de zéro, et par conséquent l'inégalité sera vérifiée. De plus, on aura encore, avec un contour assez petit, $u = v$.

Le problème proposé se trouvera alors résolu pour de tels contours, et l'on passera encore à un contour quelconque tracé dans la région du plan où

$$A - B > 0,$$

en employant des considérations identiques à celles dont nous avons plus haut fait usage.

Si le point (x, y) reste dans une région du plan où

$$A - B < 0,$$

on posera simplement dans l'équation $u = -v$, et elle deviendra alors

$$\Delta v = Be^{v} - Ae^{-v}$$

et nous nous retrouverons dans le cas précédent.

CHAPITRE IV.

DE L'ÉQUATION $\Delta u = Ae^{u}$.

1. Nous allons étudier particulièrement l'équation

$$\Delta u = A(x, y)e^{u}, \tag{1}$$

$A(x, y)$ étant positif. Les intégrales u, jusqu'ici considérées, étaient continues à l'intérieur du contour C. Je suppose maintenant qu'elles aient des infinis logarithmiques. J'entends qu'un point (a, b) est pour une intégrale u un infini logarithmique, si l'on a dans le voisinage de

ce point

$$u = m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2] + P(x, y),$$

$P(x, y)$ étant une fonction continue de x et y; m désigne une constante.

On voit qu'en posant

$$u = m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2] + v.$$

l'équation devient

$$(2) \qquad \Delta v = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^v.$$

Si m est positif, le coefficient de e^v dans le second membre est une fonction continue de x et y dans C; on peut donc intégrer l'équation avec des conditions aux limites données, et par suite intégrer l'équation (1) sous la condition que u prenne une succession continue donnée de valeurs sur C, et admette le point (a, b) comme point singulier logarithmique avec le coefficient m.

Si l'on a $m < 0$, mais supérieur à -1, on pourra encore intégrer l'équation (2), c'est-à-dire trouver une fonction v continue dans C et prenant des valeurs données sur ce contour. Cherchons, par exemple, l'intégrale qui s'annule sur C; on forme, comme précédemment, la succession des équations

$$\Delta S_1 = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y).$$
$$\Delta S_2 = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^{S_1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta S_n = [(x-a)^2 + (y-b)^2]^m A(x, y) e^{S_{n-1}}.$$

On intègre toujours chaque équation avec la condition que l'intégrale soit nulle sur le contour. Prenons la première équation : on a

$$S_1 = -\frac{1}{2\pi} \iint [(\xi-a)^2 + (\eta-b)^2]^m A(\xi, \eta) G(\xi, \eta, x, y) d\xi d\eta.$$

mais il faut s'assurer que l'intégrale a un sens, puisqu'ici m est négatif et que le point (a, b) est à l'intérieur de C. Or, en supposant d'abord (x, y) différent de (a, b), on voit de suite, si m est supérieur à -1, que l'intégrale est déterminée. Il en est encore de même, si $x = a$, $y = b$; en effet, pour $\xi = a$, $\eta = b$, la fonction $G(\xi, \eta, a, b)$ devient infinie comme $-\frac{1}{2}\log[(\xi - a)^2 + (\eta - b)^2]$; donc, en employant les coordonnées polaires r et θ, relatives au point (a, b), nous avons, à un terme fini près, l'élément

$$r^{2m} A(\xi, \eta) \log r . r\, dr\, d\theta;$$

l'intégrale est déterminée évidemment si $m > 0$, et, quand m est négatif, nous avons à comparer à l'élément

$$\frac{\log r\, dr\, d\theta}{r^{\lambda}}, \qquad (0 > \lambda > 1),$$

dont l'intégrale reste finie pour $r = 0$.

Nous pouvons donc raisonner sur $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}, \ldots$, comme nous l'avons fait plus haut, et ici, comme précédemment, la recherche de la fonction v satisfaisant à l'équation (2) et prenant sur le contour C une valeur donnée se trouvera effectuée si le contour C est suffisamment petit. L'emploi du procédé alterné permettra alors de passer à un contour quelconque, de telle sorte que la question suivante peut être considérée comme résolue : *nous déterminons l'intégrale de l'équation*

$$\Delta u = A e^u,$$

passant des valeurs données sur un contour C, *et ayant à l'intérieur de ce contour un certain nombre de points singuliers logarithmiques donnés, avec des coefficients donnés supérieurs à* -1.

2. Envisageons maintenant le cas plus particulier encore où $A(x, y)$ se réduit à une constante positive k. Prenons donc l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k e^u.$$

Dans ce qui précède, la région limitée par la courbe C était située tout entière à distance finie; nous allons considérer ici une région du plan comprenant le point à l'infini.

Soient $(a_1, b_1) \ldots (a_p, b_p)$ p points à distances finies, et $m_1, m_2, \ldots, m_p$ des constantes supérieures à -1; posons

$$u = \Sigma m_i \log[(x - a_i)^2 + y - b_i)] + c.$$

L'équation devient

$$(3) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k e^{\Sigma m_i \log[(x-a_i)^2 + (y-b_i)^2]} e^v.$$

Parmi les m_i les uns sont positifs, les autres négatifs; désignons par m un terme positif quelconque, et par $-m'$ un terme négatif quelconque. Nous allons supposer que

$$\Sigma m' - \Sigma m > 1$$

et, comme précédemment, les m' sont inférieurs à l'unité.

Dans ces conditions, le coefficient de e^v sera comparable, pour r très grand, à

$$\frac{1}{r^\mu}, \qquad (x^2 + y^2 = r^2),$$

μ étant supérieur à *deux*. Je dis que dans ces conditions on pourra, étant donnée une courbe fermée C enveloppant tous les points (a, b), obtenir une intégrale de l'équation (3) prenant des valeurs données sur C et continue à l'extérieur de C, même quand le point (x, y) s'éloigne indéfiniment. On le verra bien nettement, en faisant la transformation

$$x' + iy' = \frac{1}{x + iy}.$$

L'équation (3) devient alors

$$(3)' \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} = A(x', y') e^v,$$

le coefficient $A(x', y')$ devient infiniment grand, pour $x' = y' = 0$,

comme

$$\frac{k}{r'^{4-\mu}}, \qquad (x'^2 + y'^2 = r'^2).$$

et ici $4 - \mu$ est inférieur à 2; par suite, d'après le paragraphe précédent, on pourra intégrer l'équation (3) en se donnant la valeur de v le long de la courbe C' transformée de C, la fonction v étant continue à l'intérieur de C'. Si donc on revient à l'équation (3), celle-ci se trouvera bien intégrée dans les conditions indiquées; *l'intégrale prendra des valeurs données le long de* C *et sera continue à l'extérieur, même à l'infini*. Pour l'intégrale u, on pourra dire que le point à l'infini est un point singulier logarithmique et le coefficient correspondant sera $-\Sigma m_i$.

5. Nous pouvons maintenant considérer l'ensemble du plan. Soient encore donnés des points (a_i, b_i) à distance finie avec les coefficients correspondants m_i. Nous formons, comme au paragraphe précédent, l'équation (3), et nous supposons vérifiée l'inégalité écrite à la suite. *Cherchons à obtenir une intégrale de l'équation* (3), *continue dans tout le plan, même à l'infini.*

Nous allons, à cet effet, faire encore usage du procédé alterné. Soit C une première courbe fermée enveloppant tous les points (a, b) et C' une seconde courbe fermée extérieure à C. Toutes les fonctions que nous allons considérer satisferont à l'équation (3); nous partons d'une fonction v'_1, déterminée dans C', et prenant sur C' la valeur zéro. La fonction v'_1, ainsi obtenue, prend sur C certaines valeurs; formons alors la fonction v_1 continue à l'extérieur de C et prenant sur C les mêmes valeurs que v'_1. Nous passons ensuite à une fonction v_2, continue dans C', et prenant sur C' les mêmes valeurs que v_1, et nous continuons indéfiniment cette succession d'opérations. Nous obtenons ainsi deux suites de fonctions

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

Nous avons, au n° **5**, rencontré deux suites présentant avec celles-ci une grande analogie. En appliquant absolument le même genre de considérations, on établit que les termes de la première ligne tendent

vers une limite v fonction continue de x et y dans C′, et satisfaisant à l'équation (3); de même les termes de la seconde ligne tendent vers une limite v, fonction continue à l'extérieur de C, et vérifiant également l'équation (3). Enfin dans la partie comprise entre C et C′, on a

$$v = v'.$$

L'ensemble des deux fonctions v et v' nous donne donc une intégrale de l'équation (3), continue dans tout le plan, même à l'infini.

Au lieu de partir d'une intégrale v'_1 prenant sur C′ la valeur zéro, nous aurions pu partir d'une intégrale v'_1 prenant sur C′ une valeur constante a, et la même méthode de démonstration eût été applicable; d'ailleurs ce cas se ramène à la précédente, en remplaçant v par $v + a$, ce qui revient à remplacer, dans l'équation (3), k par ke^a.

Il est intéressant de rechercher quel peut être le degré d'indétermination d'une intégrale de l'équation

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = ke^{\sum m_i \log[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2]} e^v,$$

restant continue pour tout point (x, y) du plan, même le point à l'infini.

Nous allons montrer que, *si deux intégrales, jouissant de cette propriété, ont la même valeur en un point quelconque du plan, elles coïncideront nécessairement.*

4. Avant de démontrer cette proposition, il nous faut établir un théorème préliminaire.

Reprenons l'équation en u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u,$$

dont l'équation en v n'était que la transformée, et soit (α, β) un point différent des points (a, b) et du point à l'infini. Désignons par u et U deux intégrales continues, ainsi que toutes leurs dérivées partielles dans le voisinage de (α, β).

Supposons que u et U soient égales au point (α, β). Je dis que ce point ne pourra être un point *isolé* pour la courbe

$$U(x, y) - u(x, y) = 0.$$

Si en effet, il en est ainsi, on aura, par exemple, dans le voisinage de (α, β),

$$U(x, y) > u(x, y),$$

cette inégalité devenant seulement une égalité pour $x = \alpha$, $y = \beta$. Traçons une courbe fermée C enveloppant (α, β); nous avons deux intégrales U et u, et, en tous les points du contour, la première est supérieure à la seconde. Nous avons déjà eu l'occasion de remarquer que, à l'intérieur du contour, U ne pouvait pas devenir inférieur à u (ce qui d'ailleurs ici est dans les hypothèses), mais j'ajoute maintenant que l'égalité même est impossible. Nous allons supposer que le contour C soit un cercle de centre O et de rayon R; nous voulons donc comparer deux intégrales U et u continues, ainsi que leurs dérivées partielles dans le cercle C, la première prenant des valeurs supérieures à la seconde sur ce cercle. Nous considérerons d'abord le cas où les valeurs de U et u sur C sont deux constantes A et a $(A > a)$; *il s'agit d'établir que* U, *qui, nous le savons, n'est jamais inférieur à* u, *ne lui devient jamais égal.* Par raison de symétrie, U et u ne dépendent que de la distance r du point (x, y) au centre O; si donc il y a, en dehors du point O, des points où u et U sont égales, ces points formeront des circonférences. Nous n'avons qu'à considérer la plus grande de ces circonférences : soit C′ de rayon R′; à l'intérieur de C′, u et U devront nécessairement coïncider. Prenons maintenant un point M quelconque de cette circonférence; en ce point on aura

$$u = U, \qquad \frac{du}{dr} = \frac{dU}{dr},$$

or u et U satisfont à la même équation différentielle ordinaire du second ordre, donc u et U devront encore avoir la même valeur depuis $r = R'$ jusqu'à $r = R$, puisqu'elles ne cessent d'être continues. Ce résultat est absurde, puisque pour $r = R$, u et U ont des valeurs diffé-

rentes. La circonférence C′ ne peut donc exister, mais il nous reste à examiner le cas où cette circonférence se réduirait à un point, c'est-à-dire le cas où U et u seraient égales seulement au point O. Une difficulté se présente ici, car l'équation différentielle entre u et r admet $r = 0$ comme point critique, et le raisonnement précédent pourrait ne pas subsister. Cette équation différentielle peut s'écrire

$$r\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{du}{dr} + kr.e^u.$$

Soit pour $r = 0$, $u = u_0$; on aura nécessairement $\left(\frac{du}{dr}\right)_0 = 0$. Or, d'après un théorème que j'ai établi autrefois [*Sur les équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques* (*Comptes rendus*, 1878, second semestre)], il n'y a qu'une seule intégrale continue pour $r = 0$, prenant pour $r = 0$, la valeur u_0 et pour laquelle $\left(\frac{du}{dr}\right)_0$ soit nulle. Il en résulte que nos deux intégrales U et u qui ont la même valeur au point O doivent nécessairement coïncider, et la conclusion précédente subsiste.

Nous venons de supposer que les valeurs de U et u sur le cercle C étaient des constantes; considérons maintenant le cas où elles seraient des fonctions continues quelconques, mais de telle sorte que U soit toujours supérieur à u. Dans ces conditions U aura un certain minimum A sur le cercle C, et u un maximum a, et A sera supérieur à a; soit U_1 l'intégrale de l'équation proposée qui prend la valeur A sur le cercle C et u_1 l'intégrale qui prend la valeur a; d'après ce qui précède, pour tout point de l'intérieur du cercle

$$U_1 > u_1,$$

inégalité qui ne se transforme jamais, nous venons de l'établir, en une égalité. D'autre part, on a

$$U \geqq U_1 \qquad \text{et} \qquad u \leqq u_1;$$

donc, par suite,

$$U > u,$$

l'égalité étant exclue; c'est ce que nous voulions établir.

Il résulte de là que si en (α, β), U et u ont même valeur, ce point ne sera pas un point isolé pour la courbe

$$U(x, y) - u(x, y) = 0,$$

car autrement $U - u$ garderait un signe invariable dans le voisinage de (α, β); sur un cercle notamment, suffisamment petit, ayant (α, β) pour centre, on aurait toujours $U > u$, et ces deux fonctions ne pourraient avoir même valeur en un point de l'intérieur.

5. Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé à la fin du n° 3. Soient deux intégrales de l'équation en v, écrite plus haut, V et v, continues pour tout point (x, y) du plan, même le point à l'infini.

Leurs dérivées partielles sont aussi continues, *sauf aux points* (a, b) *et au point à l'infini*. Je suppose qu'en un point (α, β) [distinct des (a, b) et du point à l'infini], on ait

$$V = v.$$

D'après ce qui vient d'être établi, il y aura nécessairement une courbe réelle représentée par l'équation

$$V(x, y) - v(x, y) = 0,$$

et cette courbe (qui pourra passer par les points $[a, b]$ ou le point à l'infini, et même avoir ces points comme points asymptotiques) partagera le plan en deux régions, au moins. Il en résulte que les deux intégrales qui ont même valeur sur les bords de chacune de ces régions (que cette région reste tout entière à distance finie ou s'étende à l'infini) coïncideront. Les deux intégrales ne sont donc pas distinctes. Nous pouvons alors énoncer le théorème suivant, en revenant à l'équation initiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u.$$

Une intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles pour tout point du plan distinct de certains points donnés

(a, b) et du point à l'infini, admettant comme points singuliers logarithmiques les points (a, b), avec des coefficients m donnés satisfaisant aux inégalités indiquées, ayant de plus le point à l'infini comme point singulier logarithmique avec un coefficient égal à $-\Sigma m$, est déterminée quand on donne sa valeur en un point du plan différent des points critiques.

6. Après avoir étudié les intégrales de l'équation sur le plan simple, il sera facile d'étendre l'étude précédente au plan multiple, c'est-à-dire au plan recouvert d'un certain nombre de feuillets, et formant ce que l'on appelle une *surface de Riemann*. Nous pouvons supposer que cette surface de Riemann n'a pas de points de ramification à l'infini, comme on le fait habituellement dans la théorie des fonctions abéliennes. Soit n le nombre des feuillets. Désignons, pour abréger, par $P_1, P_2, \ldots, P_n$ le point à l'infini sur chacun de ces feuillets. Soit de plus sur la surface à distance finie un certain nombre de points (a_i, b_i), distincts des points de ramification, à chacun desquels nous associons un coefficient m_i. Associons de même à $P_1, P_2, \ldots, P_n$ les coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_n$. On sait qu'on peut former une fonction uniforme sur la surface de Riemann, satisfaisant à l'équation de Laplace, et ayant les points singuliers logarithmiques (a_i, b_i) avec les coefficients correspondants m_i, et les points P avec les coefficients M. Un point (a, b) est, pour une fonction u, un point singulier logarithmique avec l'exposant m, si, dans le voisinage de ce point, u diffère seulement par une fonction continue de

$$m \log[(x-a)^2 + (y-b)^2].$$

Pour un point P de coordonnées (x, y) à l'infini sur un des feuillets, la fonction différera seulement par une fonction continue de

$$M \log(x^2 + y^2).$$

Il y a d'ailleurs entre les M et les m la relation bien connue

$$\Sigma M + \Sigma m = 0.$$

Désignons par Φ la fonction *harmonique* ainsi déterminée, et dans l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u,$$

posons

$$u = \Phi + v;$$

nous aurons l'équation en v,

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = k.e^{\Phi} e^v.$$

Nous allons raisonner sur cette équation en v, comme sur l'équation analogue (3) du n° **2**. Nous supposerons que les m sont supérieurs à -1; au contraire, tous les M sont inférieurs à -1.

Montrons comment on peut former une intégrale de l'équation (4) continue en *tous* les points de la surface de Riemann. Sur $n-1$ des feuillets, je détache le point à l'infini par des courbes fermées de très grande dimension $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$, et je considère la portion de la surface de Riemann limitée par $C_1, C_2, \ldots, C_{n-1}$ et comprenant le point à l'infini sur le $n^{\text{ième}}$ feuillet. Sur cette portion de surface qui n'a qu'un point à l'infini, nous pouvons, en raisonnant comme dans le cas du plan simple, obtenir une intégrale continue et prenant sur C_1, $C_2, \ldots, C_{n-1}$ des valeurs données. Ceci fait, en appliquant de nouveau la méthode alternée, pour deux contours autour du point P_{n-1}, nous obtenons une intégrale continue sur la portion de la surface limitée par $C_1, C_2, \ldots, C_{n-2}$ et prenant sur ces courbes des valeurs données. En continuant ainsi de proche en proche, nous arrivons à une intégrale continue sur toute la surface de Riemann, dont les dérivées partielles sont elles-mêmes continues, sauf aux points (a, b) et au point à l'infini sur chacun des feuillets.

Quant à la conclusion du n° **5**, elle subsiste entièrement, et rien n'est à changer dans la suite des raisonnements.

7. Je ne m'étendrai pas davantage en ce moment sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k.e^u, \qquad (k > 0).$$

Elle se rattache, comme il est bien connu, à la théorie des surfaces à courbure constante négative. Cette théorie étant intimement liée à la Géométrie non euclidienne, qui y trouve une interprétation toute naturelle, on prévoit *a priori* que l'équation précédente peut être introduite dans la théorie des fonctions fuchsiennes. Pour le voir bien nettement, considérons le demi-plan de la variable complexe $z = x + iy$, décomposé en un réseau de polygones, et supposons que le polygone fondamental soit tout entier à distance finie et sans point commun avec la limite du demi-plan. Soit

$$(S) \qquad f(Z, U) = 0$$

une courbe algébrique correspondant à ce groupe fuchsien : Z et U sont deux fonctions fuchsiennes de z. Considérons la forme quadratique que laissent invariable les substitutions du groupe fuchsien

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

en posant $Z = X + iY$, elle se transforme en

$$\lambda(dX^2 + dY^2).$$

λ étant une fonction de X et Y. Or, dans l'identité,

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \lambda(dX^2 + dY^2).$$

Le premier membre peut représenter le carré de l'élément linéaire d'une surface dont la courbure est constante et égale à -1. Il en est donc de même du second membre ; par conséquent, on aura

$$\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial Y^2} = 2\lambda,$$

et par suite, en posant $\lambda = e^u$,

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 2e^u;$$

c'est l'équation écrite plus haut pour $k = 2$. D'autre part, de l'identité

$$\frac{dx^2 + dy^2}{y^2} = \lambda(dX^2 + dY^2),$$

on déduit, en posant $Z = f(z)$ [$f(z)$ étant une fonction fuchsienne],

$$\lambda = \frac{1}{y^2 \operatorname{mod}^2 f'(z)}.$$

Cette expression ne change pas, quand on effectue sur z une substitution du groupe fuchsien; donc λ, considérée comme fonction de X et Y, sera une fonction uniforme sur la surface de Riemann définie par l'équation (S). Il en sera nécessairement de même de u: nous avons donc ainsi une intégrale de l'équation (5), uniforme sur la surface de Riemann, et n'ayant que des singularités logarithmiques. Je ne poursuis pas aujourd'hui les conséquences de cette remarque : cette étude spéciale, sur laquelle je compte revenir, nous éloignerait trop des considérations générales sur les approximations successives, qui font le principal objet de ce travail.

CHAPITRE V.

QUELQUES REMARQUES SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

1. Les méthodes d'approximation dont nous venons de faire usage peuvent évidemment être employées dans le cas des équations différentielles ordinaires; c'est un point sur lequel il ne me paraît pas inutile de s'arrêter, quoique nous n'ayons qu'à appliquer des méthodes étudiées plus haut.

Prenons tout d'abord une seule équation du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x);$$

on peut établir ainsi le théorème fondamental relatif à l'existence de l'intégrale de cette équation, prenant pour $x = x_0$ la valeur $y = y_0$. On considérera, à cet effet, les équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(y_0, x),$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f(y_1, x),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f(y_{n-1}, x),$$

en effectuant chacune des quadratures, de façon que pour $x = x_0$ on ait $y_n = y_0$. Il s'agit d'établir que y_n tend, pour n infini, vers une limite y qui représentera l'intégrale cherchée, pourvu d'ailleurs que x reste dans le voisinage de x_0. Nous faisons sur la fonction $f(y, x)$, l'hypothèse qu'elle est continue et définie pour les valeurs de x et de y comprises respectivement entre $x_0 - a$ et $x_0 + a$ d'une part, puis $y_0 - b$ et $y_0 + b$ d'autre part; de plus, on peut déterminer une constante positive k, telle que

$$|f(y_2, x) - f(y_1, x)| < k|y_2 - y_1|$$

et nous supposons la fonction et les variables réelles.

Soit M le module maximum de $f(y, x)$ quand x et y restent entre les limites indiquées. On aura

$$y_1 = \int_{x_0}^{x} f(y_0, x)\, dx + y_0.$$

Soit ρ une quantité au plus égale à a; y_1 restera dans les limites voulues si

$$M\rho < b,$$

et il est évident qu'alors il en sera de même de $y_2, \ldots, y_n$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste compris entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$.

Nous avons alors, en posant $y_n - y_{n-1} = z_n$,

$$\frac{dz_1}{dx} = f(y_0, x),$$

$$\frac{dz_2}{dx} = f(y_1, x) - f(y_0, x),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz_n}{dx} = f(y_{n-1}, x) - f(y_{n-2}, x);$$

et tous les z s'annulent pour $x = x_0$. On a

$$|z_1| < M\delta,$$

$$|z_2| < kM\delta^2,$$

puis

$$|z_3| < k^2 M\delta^3$$

et, d'une manière générale,

$$|z_n| < M\delta(k\delta)^{n-1}.$$

On voit donc, en écrivant

$$y_n = y_0 + z_1 + z_2 + \ldots + z_n,$$

que y_n tendra vers une limite si $k\delta < 1$. La série

$$y = y_0 + z_1 + \ldots + z_n + \ldots$$

sera convergente, comme une progression géométrique décroissante. Ainsi y_n converge vers une limite y, quand x reste compris entre $x_0 - \delta$ et $x_0 + \delta$, δ *étant la plus petite des quantités*

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{k}.$$

Dans cet intervalle, y représentera manifestement une fonction continue de x. On a, d'ailleurs,

$$y_n = \int_{x_0}^{x} f(y_{n-1}, x)\, dx + y_0,$$

et, comme y_n et y_{n-1} tendent vers y, il en résulte que

$$y = \int_{x_0}^{x} f(y, x)\, dx + y_0$$

et, par suite,

$$\frac{dy}{dx} = f(y, x),$$

c'est-à-dire que la limite y satisfait à l'équation différentielle. L'existence de l'intégrale est donc ainsi établie. On peut évidemment employer le même mode de démonstration si f est une fonction analytique des variables complexes x et y.

2. Passons à des cas moins simples, et cherchons ce que deviennent, dans le cas particulier d'une seule variable, les résultats que nous avons établis dans le cas de deux variables. Nous envisageons l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Au point de vue où nous sommes placé, nous devons chercher à déterminer une intégrale par la valeur A qu'elle prend pour $x = a$, et la valeur B qu'elle prend pour $x = b$.

Partant d'une fonction arbitraire y_0, on formera la suite des équations

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right),$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^2 y_n}{dx^2} = f\left(x, y_{n+1}, \frac{dy_{n-1}}{dx}\right),$$

chaque équation étant intégrée par la condition que, pour $x = a$ et $x = b$, l'y correspondant prenne respectivement les valeurs A et B.

En faisant les mêmes hypothèses sur la fonction f qu'au Chapitre I, on démontrera que y_n tendra vers une limite y si l'intervalle (a, b) est suffisamment petit. On aura ainsi une intégrale de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right),$$

continue dans l'intervalle (a, b) et prenant aux deux extrémités les valeurs A et B. Cette intégrale n'est pas, d'ailleurs, nécessairement unique.

3. Rapprochons-nous maintenant des circonstances étudiées dans le Chapitre III, en partant de l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y).$$

Si la fonction f croît toujours en même temps que y, il ne pourra y avoir deux intégrales de cette équation, continues dans l'intervalle (a, b), et prenant les valeurs A et B aux deux extrémités. On aurait, en effet, en désignant par y_1 et y_2 ces intégrales,

$$(1) \qquad \frac{d^2(y_1 - y_2)}{dx^2} = f(x, y_1) - f(x, y_2);$$

on peut supposer que, dans l'intervalle (a, b), la différence $y_1 - y_2$ qui s'annule aux limites, garde un signe constant dans l'intervalle; car, dans le cas contraire, on fractionnerait l'intervalle en plusieurs autres. Or, si l'on a

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x),$$

l'intégrale z, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = x_0 > 0$ est donnée par la formule

$$z = \frac{x - x_0}{x_0} \int_0^x z\,\varphi(z)\,dz - x \int_x^{x_0} \varphi(z)\left(1 - \frac{z}{x_0}\right) dz.$$

Si donc $\varphi(x)$ est positif, z sera négatif dans l'intervalle de o à x_0. Soit maintenant, pour fixer les idées, $y_1 > y_2$ dans l'intervalle (a, b), l'équation (1) montre que $y_1 - y_2$ est négatif dans cet intervalle, contradiction qui démontre notre assertion.

La méthode d'approximations successives ne donne une suite convergente que si l'intervalle est suffisamment petit; mais nous pouvons encore ici, comme dans le cas de l'équation à deux variables, employer un procédé alterné. Il s'agit de montrer que, ayant quatre quantités a, α, b, β rangées par ordre croissant de grandeur, si l'on sait résoudre le problème pour l'intervalle (a, b) et l'intervalle (α, β), on pourra le résoudre pour l'intervalle (a, β). On supposera, comme il est permis, que les valeurs extrêmes sont nulles; de plus, il est supposé que $f(x, y)$ reste toujours positive.

On considère d'abord l'intégrale u_1 de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y) \tag{2}$$

définie dans l'intervalle (a, b) et s'annulant aux extrémités. Elle prend en α une certaine valeur, et l'on forme alors l'intégrale de l'équation prenant en α cette valeur et s'annulant en β; en continuant ainsi, l'on forme deux suites

$$\begin{array}{cccccc} u_1, & u_2, & u_3, & \ldots, & u_n, & \ldots \\ v_1, & v_2, & v_3, & \ldots, & v_n, & \ldots, \end{array}$$

comme dans le cas des deux contours qui empiètent l'un sur l'autre. Nous allons montrer que u_n et v_n tendent chacun vers une limite. Il nous faut faire, avant tout, deux remarques : soit une intégrale de l'équation $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, s'annulant en a et prenant en b une valeur négative $-B$; on vérifie immédiatement que cette intégrale prend en α une valeur $-Bq$, q étant un nombre positif plus petit que l'unité. D'autre part, si l'on considère deux intégrales y_1 et y_2 de l'équation (2), et telles que $y_1 \geqq y_2$ en a et en b, il en sera de même dans tout l'intervalle.

Ceci posé, il n'y a plus rien à changer aux raisonnements que nous avons faits au Chapitre III, et nous arrivons à la même conclusion.

Dans ce qui précède, il est supposé que $f(x, y)$ est toujours positif; on pourrait encore se placer dans la même hypothèse qu'au n° **4** du Chapitre III, c'est-à-dire examiner le cas où $f(x, y)$, toujours croissant avec y, s'annule pour $y = 0$. Si les valeurs extrêmes que l'on se donne pour l'intégrale sont de même signe, on pourra encore employer le procédé alterné.

4. Nous venons, dans le numéro précédent, de nous placer entièrement au même point de vue que dans le cas de l'équation aux dérivées partielles. Nous pouvons continuer encore à développer cette analogie. Revenons à l'équation

$$(3) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Il y a un cas où l'on peut être assuré qu'il n'y a qu'une seule intégrale, continue dans un intervalle (a, b) et prenant aux deux extrémités des valeurs données. Prenons d'abord l'équation linéaire : soit

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2A\frac{dy}{dx} + By,$$

A et B ne dépendant que de x. Supposons qu'il y ait une intégrale y, s'annulant pour $x = a$ et pour $y = b$. On a évidemment

$$\int_a^b y\left(\frac{d^2 y}{dx^2} - 2A\frac{dy}{dx} - By\right) dx = 0,$$

qui se transforme de suite, en intégrant par partie, et devient

$$(\alpha) \qquad \int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2Ay\frac{dy}{dx} + By^2\right] dx = 0;$$

si donc on a, pour toute valeur de x entre a et b,

$$B > A^2.$$

on est assuré que l'intégrale considérée y ne peut qu'être identiquement nulle. On pourrait, d'ailleurs, aller plus loin, en employant un artifice dont nous nous sommes servi déjà au commencement même de ce Mémoire. Si λ désigne une fonction continue quelconque de x, entre a et b, on aura

$$(\beta) \qquad \int_a^b \frac{d(\lambda y^2)}{dx}\,dx = 0:$$

en additionnant (α) et (β), il vient

$$\int_a^b \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2(\lambda + A)y\frac{dy}{dx} + \left(B + \frac{d\lambda}{dx}\right)y^2\right] = 0:$$

si donc λ est tel que

$$\frac{d\lambda}{dx} - (\lambda + A)^2 - B > 0,$$

y devra être identiquement nul. Nous sommes donc ramené à rechercher si l'on peut déterminer une fonction continue λ de x, entre a et b, telle que cette inégalité soit vérifiée. Mais je n'insiste pas sur ce point, et nous nous contenterons de la condition suffisante

$$B > A^2.$$

Reprenons maintenant l'équation non linéaire (3). On va trouver très facilement un cas étendu où cette équation ne pourra avoir deux intégrales continues, prenant les mêmes valeurs en a et b. Soient, en effet, y_1 et y_2 deux telles intégrales; on a

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) - f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right).$$

Si nous supposons maintenant que f ait des dérivées partielles du second ordre, elles-mêmes continues, nous pourrons écrire, en posant $y_2 - y_1 = u$,

$$\frac{d^2u}{dx^2} = A\frac{du}{dx} + Bu:$$

en posant

$$A = f'_z\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right),$$

$$B = f'_y\left(x, y_1 + \theta u, \frac{dy_1}{dx} + \theta' \frac{du}{dx}\right),$$

je désigne, pour marquer les dérivations, la fonction f par $f(x, y, z)$. A et B peuvent être considérées comme des fonctions de x. Or, si l'on a, quels que soient y et z, pour x compris entre a et b,

$$4 f'_y(x, y, z) > [f'_z(x, y, z)]^2,$$

il est manifeste que l'équation (3) n'aura qu'une seule intégrale prenant des valeurs données pour $x = a$ et pour $y = b$, résultat qui comprend nécessairement comme cas particulier celui où la fonction f ne contient que x et y, et croît avec y.

5. Nous n'avons jusqu'ici considéré qu'une seule équation. Il est très intéressant de considérer un système d'équations de la forme

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{d^m y_m}{dx^2} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

Nous n'avons pas, pour les équations aux dérivées partielles, considéré des *systèmes d'équations*.

Les résultats précédents ne s'étendent pas d'eux-mêmes à un tel système. Il sera suffisant de se borner à $m = 2$; nous écrivons donc les deux équations

$$(4) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, z), \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y, z).$$

Nous considérons de suite le cas où f et φ sont positifs et *croissent* avec y et z. On ne doit pas chercher à établir qu'il n'y a dans ce cas

qu'un seul système d'intégrales continues prenant pour $x = a$ et $x = b$ des valeurs données; le fait n'est pas exact. Pour en donner un exemple, il suffit de considérer l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y),$$

f étant positif et croissant avec y. Il y a une intégrale Y de cette équation s'annulant aux deux limites de l'intervalle (a, b), D'autre part, les approximations successives donnent, en général, deux limites y_1 et z_1 différentes, s'annulant en a et b et satisfaisant aux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, z),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = f(x, y).$$

Si donc on envisage ce système, il admet, avec les mêmes conditions aux limites, les deux systèmes de solutions

$$\left.\begin{array}{l} y = \mathrm{Y} \\ z = \mathrm{Y} \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} y = y_1, \\ z = z_1. \end{array}\right.$$

Ils ne coïncident que si l'intervalle est assez petit.

Cette remarque faite, revenons au système (4). Nous n'allons avoir à donner à y et z que des valeurs négatives, et nous supposerons que pour deux tels systèmes quelconques de valeurs (y_1, z_1) et (y_2, z_2), on a

$$|f(x, y_2, z_2) - f(x, y_1, z_1)| < \mathrm{A}.|y_2 - y_1| + \mathrm{B}.|z_2 - z_1|,$$
$$|\varphi(x, y_2, z_2) - \varphi(x, y_1, z_1)| < \mathrm{C}.|y_2 - y_1| + \mathrm{D}.|z_2 - z_1|,$$

A, B, C et D désignant quatre constantes positives.

Quelle que soit la longueur de l'intervalle (a, b), l'emploi des approximations successives conduit, en partant de $y = 0$, $z = 0$, à deux limites déterminées : (u, v) d'une part, (U, V) de l'autre. C'est seu-

lement quand l'intervalle est assez petit que l'on a

$$U = u, \qquad V = v.$$

Désignons par λ la limite supérieure au-dessous de laquelle ces identités seront vérifiées. Cette limite pourra s'exprimer à l'aide de A, B, C et D. Si maintenant on veut avoir un système d'intégrales y, z prenant des valeurs autres que zéro, aux deux extrémités, on pose

$$y = \alpha x + \beta + y', \qquad z = \alpha_1 x + \beta_1 + z',$$

les α et β étant choisis de façon que y' et z' s'annulent aux deux limites, et l'on a deux équations de même forme. On appliquera alors à ces équations transformées la méthode d'approximations successives; la limite λ (qui ne dépend que de A, B, C, D), au-dessous de laquelle les approximations donnent une limite unique, sera la même que plus haut. Nous pouvons donc attacher un sens précis à l'intégrale, calculée comme il vient d'être dit, prenant des valeurs données (négatives), aux deux extrémités d'un intervalle moindre que λ. On peut, d'ailleurs, en réduisant encore λ, s'il est nécessaire, démontrer que cette intégrale est unique.

Considérons, en effet, deux systèmes (y_1, z_1) et (y_2, z_2) d'intégrales s'annulant aux extrémités α et β d'un intervalle. Les quatre fonctions y_1, y_2, z_1 et z_2 seront évidemment négatives, et, en posant $y_2 - y_1 = u$, $z_2 - z_1 = v$, on pourra écrire

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = A_1 u + B_1 v,$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = A_2 u + B_2 v,$$

A_1, A_2, B_1, B_2 étant des fonctions de x, respectivement moindres que les constantes positives A, B, C, D considérées plus haut. On suppose ici que f et φ ont des dérivées partielles par rapport à y et z. Or nous allons voir que, dans ce dernier système d'équations, il n'y a pas d'intégrales continues s'annulant pour α et β, si l'intervalle (α, β) est assez petit, sauf $u = 0$, $v = 0$. Le point *très important* consiste à montrer

que la limite supérieure de cet intervalle peut s'exprimer en fonction de A, B, C, D. A cet effet, nous considérons les relations

$$\int_\alpha^\beta u\left(\frac{d^2u}{dx^2} - A_1 u - B_1 v\right) dx = 0,$$

$$\int_\alpha^\beta v\left(\frac{d^2v}{dx^2} - A_2 u - B_2 v\right) dx = 0,$$

évidemment vérifiées, puisque l'élément est identiquement nul, qui se transforment de suite en

$$(\mu)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + A_1 u^2 + B_1 uv\right] dx = 0, \\ \displaystyle\int_\alpha^\beta \left[\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + A_2 uv + B_2 v^2\right] dx = 0. \end{cases}$$

A ces deux relations, joignons les trois suivantes

$$(\nu)\quad \int_\alpha^\beta \frac{d(Pu^2)}{dx} dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{d(Quv)}{dx} dx = 0, \qquad \int_\alpha^\beta \frac{d(Rv^2)}{dx} dx = 0,$$

où P, Q, R sont des fonctions continues quelconques de x. En faisant la somme des premiers membres des relations (μ) et (ν), nous obtiendrons une intégrale unique, dont l'élément sera une forme quadratique en u, v, $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$. Les conditions pour que cette forme soit définie s'expriment par trois inégalités entre P, Q, R et leurs dérivées premières et les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2 : il est inutile de les écrire, quoique ce soit bien simple : soit

$$\varrho_1 < 0, \qquad \varrho_2 < 0, \qquad \varrho_3 < 0;$$

or considérons les équations

$$\varrho_1 = -a^2, \qquad \varrho_2 = -a^2, \qquad \varrho_3 = -a^2,$$

a étant un nombre fixe, d'ailleurs arbitraire. Nous pouvons considérer

ces trois équations comme définissant P, Q, R, dont on se donnera arbitrairement les valeurs pour une valeur particulière de x. La limite de la région, dans laquelle P, Q, R seront certainement continues, pourra s'exprimer en fonction des constantes A, B, C, D; car les fonctions A_1, A_2, B_1, B_2 et non leur dérivée figurent dans les φ. Le théorème est donc établi. *Pour un intervalle* (a, b), *nous pouvons fixer un nombre* λ, *tel que pour tout intervalle* (α, β) *compris dans* (a, b) *et moindre que* λ, *les approximations successives convergent, et que de plus il n'y ait qu'un seul système* (u, v) *prenant des valeurs négatives données en* α *et* β.

Ce résultat obtenu, nous allons pouvoir trouver une intégrale (y, z) du système (4) prenant aux deux extrémités de l'intervalle (a, b) des valeurs données, que nous pouvons supposer être zéro. On peut, en effet, faire usage du procédé alterné, pourvu que la longueur d'un des deux intervalles, qui ont une partie commune, ne dépasse pas λ. Désignons comme plus haut (n° 5) par (a, b) et (α, β) les deux intervalles, on aura pour l'ensemble (y, z) deux suites qui convergent chacune vers une limite; l'une de ces suites est définie dans l'intervalle (a, b), l'autre dans l'intervalle (α, β). Dans ces deux suites, y et z ont la même valeur en α et en b; si l'intervalle (α, b) est supérieur à λ, nous ne sommes pas assuré que y et z coïncideront dans les deux suites, de α à b, et alors la méthode alternée ne nous donne rien. Il en est tout autrement si un des intervalles, et par suite (α, b) est moindre que λ. On peut toujours s'arranger de manière qu'il en soit ainsi, et finalement on arrivera à l'intervalle (a, b). *Nous obtenons donc en résumé un système d'intégrales* (y, z) *de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, z), \qquad \frac{d^2 z}{dx^2} = \varphi(x, y, z),$$

y *et* z *s'annulant pour* $x = a$, *et pour* $x = b$. Nous ne pouvons d'ailleurs pas affirmer, cela n'est même pas exact, en général, qu'il n'y ait que cette solution satisfaisant à ces conditions; *mais il nous paraît intéressant d'avoir établi l'existence d'au moins une solution*. Ces considérations s'étendent à un nombre quelconque d'équations de même forme.

Pour les équations aux dérivées partielles, on pourrait de même

envisager certains systèmes, ce que nous n'avons pas fait dans les Chapitres précédents. L'extension des considérations qui viennent d'être développées en dernier lieu ne présenterait pas de difficultés. On considérerait le système

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = f_1(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = f_2(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\partial^2 u_m}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_m}{\partial y^2} = f_m(x, y, u_1, u_2, \ldots, u_m).$$

En supposant les f positifs et croissant avec les u, on pourra former *un système* d'intégrales $u_1, u_2, \ldots, u_m$ prenant des valeurs données sur un contour, système qui d'ailleurs ne sera pas unique en général.

Sur les formes différentielles associées;

PAR M. G. HALPHEN.

Voici d'abord une formule qui sera très utile.

Soit y une fonction d'une variable indépendante, par rapport à laquelle on prend les dérivées, dénotées par des accents. On a successivement

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 2yy' &= (y^2)', \\ 2yy'' &= (y^2)'' - 2y'^2, \\ 2yy''' &= (y^2)''' - 3(y'^2)', \\ 2yy^{\text{IV}} &= (y^2)^{\text{IV}} - 4(y''^2)'' + 2y'^2. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules apparaissent les mêmes coefficients numériques que dans les suivantes :

$$\begin{aligned} 2\cos\alpha &= (2\cos\alpha), \\ 2\cos 2\alpha &= (2\cos\alpha)^2 - 2, \\ 2\cos 3\alpha &= (2\cos\alpha)^3 - 3(2\cos\alpha), \\ 2\cos 4\alpha &= (2\cos\alpha)^4 - 4(2\cos 2\alpha)^2 + 2. \end{aligned}$$

D'une manière générale, on a, comme on sait,

$$\begin{aligned} 2\cos n\alpha = (2\cos\alpha)^n &- \frac{n}{1}(2\cos\alpha)^{n-2} \\ &+ \frac{n(n-3)}{1.2}(2\cos\alpha)^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(2\cos\alpha)^{n-6}\ldots \end{aligned}$$

On aura de même

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} 2yy^{(n)} &= (y^2)^{(n)} - \frac{n}{1}(y'^2)^{(n-2)} \\ &\quad + \frac{n(n-3)}{1.2}(y''^2)^{(n-4)} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}(y'''^2)^{(n-6)} \ldots \end{aligned}\right.$$

La démonstration, sur laquelle je ne crois pas utile d'insister, résulte immédiatement des deux formules comparées

$$2\cos(n+1)\alpha = (2\cos\alpha)\,2\cos n\alpha - 2\cos(n-1)\alpha,$$
$$2yy^{(n+1)} = (2yy^{(n)})' - 2y'y^{(n)}.$$

Dans cette dernière, le second terme du second membre s'exprime au moyen de la formule (2), où l'on change y en y' et n en $(n-1)$.

Par le changement de y en y' ou y'', y''', ... la formule (2) permet, comme on voit, d'exprimer tout produit de deux figures y, y', y'', ... par les carrés et les dérivées de ces carrés.

Une expression U, contenant une ou plusieurs indéterminées comme y, fonction, laissée arbitraire, de la variable indépendante, est dite *dérivée exacte* s'il existe une autre expression V, contenant les mêmes indéterminées, et dont la dérivée V′ reproduise exactement U. Ainsi par les formules (1) on voit que yy', yy''' sont des dérivées exactes, tandis que yy'', yy^{IV} n'en sont pas. Et généralement, dans la formule (2), on voit que $yy^{(n)}$ est, ou non, une dérivée exacte, suivant que n est impair ou pair.

Dans ce qui va suivre, nous emploierons le signe $\equiv$ pour exprimer une égalité dans laquelle on néglige des dérivées exactes. Par exemple, d'après la formule (2), où l'on suppose n pair, on déduit en retenant seulement le dernier terme, dont le coefficient est égal à 2,

$$(3)\qquad yy^{(2m)} \equiv (-1)^m (y^{(m)})^2;$$

tandis que, si n est impair, on conclut

$$(3\ bis)\qquad yy^{(2m+1)} \equiv 0.$$

Soit a une autre fonction quelconque de la même variable indépendante.

Prenons l'identité, base de l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} & a y^{(m)} + (-1)^{m-1} y a^{(m)} \\ & \quad = [a y^{(m-1)} - a' y^{(m-2)} + a'' y^{(m-3)} - \ldots + (-1)^{m-1} a^{(m-1)} y]' \end{aligned}$$

ou, suivant nos conventions,

$$(4) \qquad a y^{(m)} \equiv (-1)^m a^{(m)} y.$$

Multiplions les deux membres de la formule (2) par a, puis, au second membre, remplaçons chaque terme par son équivalent d'après la formule (4) où l'on change successivement y et m en y^2 et n, en y'^2 et $(n-2)$ en y''^2 et $(n-4)$, et ainsi de suite. Il en résulte la formule suivante qui est d'une grande utilité :

$$(5) \quad \left\{ \begin{aligned} (-1)^n 2 a y y^{(n)} \equiv a^{(n)} y^2 - \frac{n}{1} a^{(n-2)} y'^2 + \frac{n(n-3)}{1.2} a^{(n-4)} y''^2 \\ - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} a^{(n-6)} y'''^2 + \ldots \end{aligned} \right.$$

Par le changement de y en y', y'', ... cette formule permet de réduire tout produit de deux figures y, y', y'', ... aux seuls carrés y^2, y'^2, y''^2, ..., en négligeant une dérivée exacte.

Nous aurons à considérer des formes quadratiques, c'est-à-dire des polynômes homogènes et du second degré, par rapport à y, y', y'' ..., avec des coefficients, qui seront censés dépendre, d'une manière quelconque, de la variable indépendante. Appelons-les, pour abréger, *formes quadratiques différentielles;* on aura soin de ne pas les confondre avec les formes quadratiques ordinaires, que nous aurons aussi à envisager, avec d'autres indéterminées, et dans lesquelles les coefficients sont toujours supposés constants ou numériques.

Nous aurons aussi à envisager des *formes linéaires différentielles*, polynômes homogènes et du premier degré en y, y', y'', ..., avec des coefficients dépendant de la variable.

Dans l'un et l'autre cas, l'*ordre* de la forme sera toujours le plus

grand indice de dérivation avec lequel figure, dans cette forme, l'*indéterminée* y. Ainsi,

$$U = ay'' + 2a'y' + a''y,$$

$$V = 2ayy''' - 2by'y'' + 3a'yy'' - b'y'^2 + 3a''yy' + a'''y^2$$

sont des formes différentielles, la première linéaire et du second ordre, la seconde quadratique et du troisième ordre. Ces formes sont toutes deux des dérivées exactes, ce qui s'écrira ainsi

$$U = 0, \qquad V = 0.$$

On a, en effet,

$$U = (ay')',$$

$$V = [2ayy' - (a + b)y'^2 + a'yy' + a''y^2]'.$$

Les formes quadratiques différentielles, qui sont des dérivées exactes, sont précisément celles que nous aurons à envisager, et le but pour lequel j'ai établi la formule (5), c'est de discerner facilement ces formes. Voici comment :

Par la formule (5) on peut immédiatement *réduire la forme à une somme de carrés*, en négligeant une dérivée exacte, et écrire ainsi, pour une forme W quelconque,

$$(6) \qquad W = A(y^{(n)})^2 + B(y^{(q)})^2 + \ldots + Ly^2.$$

Pour que W soit une dérivée exacte, il *faut* que tous ces carrés manquent; ainsi la réduction au moyen de la formule (5) fait nécessairement apparaître le caractère de dérivée exacte, s'il existe. En effet, si W est une dérivée exacte, on aura identiquement

$$(7) \qquad T' = A(y^{(p)})^2 + B(y^{(q)})^2 + \ldots + Ly^2,$$

et T sera aussi une forme quadratique différentielle. Mais, si n est l'ordre de cette dernière, les termes qui, dans T, contiennent $y^{(n)}$, donnent, par la différentiation, les termes de l'ordre le plus élevé $y^{(n+1)}$ dans T'; ceux-ci ne peuvent se réduire avec d'autres et sont du premier degré par rapport à $y^{(n+1)}$. Donc, dans la dérivée T', les termes

de l'ordre le plus élevé ne peuvent être des carrés. Donc, dans le second membre (6), aucun des indices p, q, ... ne peut être le plus grand. Donc tous ces termes doivent manquer.

En résumé, *pour qu'une forme quadratique différentielle* W *soit une dérivée exacte, il faut et il suffit que sa réduction par la formule* (5) *aboutisse à* $W \equiv 0$.

On remarquera, en passant, que la réduction d'une forme W en carrés, telle que (6), peut se faire d'une seule manière; sans quoi une somme de carrés, non identiquement nulle, serait une dérivée exacte.

Prenons pour exemple la forme V considérée précédemment; voici le calcul :

$$\begin{aligned}
2ayy''' &\equiv -a'''y^2 + 3a'y'^2,\\
2by'y'' &\equiv -b'y'^2,\\
3a'yy'' &\equiv +\tfrac{3}{2}a'''y^2 - 3a'y'^2,\\
b'y'^2 &\equiv +b'y'^2,\\
3a''yy' &\equiv -\tfrac{3}{2}a'''y^2,\\
a'''y^2 &\equiv +a'''y^2,\\
V &\equiv 0.
\end{aligned}$$

Considérons deux formes *linéaires* différentielles G_0, G_1; leur produit est quadratique. Si ce produit est une dérivée exacte, les deux formes G_0, G_1 seront dites *associées*.

Soient

$$\begin{aligned}
G_0 &= ay^{(n)} + by^{(n-1)} + \ldots,\\
G_1 &= a_1y^{(p)} + b_1y^{(p-1)} + \ldots
\end{aligned}$$

deux formes associées. Si leurs ordres p, n étaient égaux entre eux, le produit G_0G_1, réduit en carrés, contiendrait, pour premier carré $aa_1(y^{(p)})^2$, et ne serait pas une dérivée exacte. Les ordres sont donc inégaux. Soit $p < n$. Si la différence $(n-p)$ était paire, on aurait, d'après (5),

$$\begin{aligned}
2aa_1y^{(p)}y^{(n)} \equiv (aa_1)^{(n-p)}(y^{(p)})^2 - \frac{n-p}{1}(aa_1)^{(n-p-2)}(y^{(p+1)})^2 + \ldots\\
+ (-1)^{\frac{n-p}{2}}\, 2aa_1(y^{(p+n)})^2.
\end{aligned}$$

Le dernier terme de cette formule a l'ordre le plus élevé, parmi tous ceux que fournira la réduction; il est seul et ne peut disparaître. Donc l'hypothèse que n et p soient de même parité est incompatible avec la propriété d'association. Donc, *dans deux formes associées, les ordres sont de parités opposées.*

Je vais, à ce sujet, résoudre un premier problème : *Trouver toutes les formes associées à la forme la plus simple,* $G_1 = y$. Elles sont d'ordre impair, comme on vient de le reconnaître, puisque G_1 est d'ordre zéro.

Je dis d'abord que la forme suivante

$$(8) \qquad F = (ay)^{(2n+1)} + ay^{(2n+1)}$$

est une associée de G_1. Si, en effet, dans la relation (4), on suppose $m = 2n + 1$, et qu'on mette ay au lieu de a, on a (en mettant les termes au second membre)

$$y(ay)^{(2n+1)} + ayy^{(2n+1)} \equiv 0,$$

c'est-à-dire

$$G_1 F \equiv 0.$$

Soit maintenant G_0 une forme quelconque, d'ordre $(2n + 1)$, associée à G_1; prenons son premier terme $2ay^{(2n+1)}$, composons la forme F avec le même coefficient a. La différence $(G_0 - F)$ est également associée à G_1; mais elle est d'ordre inférieur à $(2n + 1)$, car F a, comme G_0, $2ay^{(2n+1)}$ pour premier terme. Donc $(G_0 - F)$ est une forme d'ordre au plus égal à $(2n - 1)$. En poursuivant, on voit que l'expression générale de G_0 se compose de la somme de plusieurs formes particulières, telles que F, d'ordres décroissants, et de coefficients $a, b, \ldots$, quelconques

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} G_0 = {} & (ay)^{(2n+1)} + ay^{(2n+1)} \\ & + (by)^{(2n-1)} + by^{(2n-1)} + \ldots + (ly)' + ly'. \end{aligned} \right.$$

Par exemple, en supposant $n = 1$, $a = \frac{1}{2}$, on trouve la forme

$$G = y''' + 2by' + b'y,$$

ayant cette propriété que yG est une dérivée exacte

$$yG = (yy'' - \tfrac{1}{2}y'^2 + by^2)'.$$

Voici un second problème analogue : *Trouver les associées de la forme* $G_1 = y'$. En mettant à part, dans la forme cherchée, le terme où y n'est pas dérivé, on peut écrire cette forme $f(y') + cy$. Mais la réduction du produit $y'f(y')$, d'après la formule (5), ne saurait amener le carré y^2, tandis que le produit cyy' amène, au contraire, le terme $-\frac{1}{2}c'y^2$. Pour que la forme soit associée de y', il faut donc que c' soit nul, donc c constant. Cela étant, cyy' est une dérivée exacte, et il faudra que $y'f(y')$ le soit aussi. Donc les formes cherchées (d'ordre $2n$) sont contenues dans la formule suivante, *où le dernier coefficient c est une constante*,

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} G_0 = {} & (ay')^{2n-1} + ay'^{(2n)} + (by')^{2n-3} \\ & + by^{(2n-2)} + \ldots + (ly')' + ly'' + cy. \end{aligned}\right.$$

Par exemple,

$$G = y^{\text{IV}} + 2by'' + b'y' + cy,$$
$$y'G = (y'y''' - \tfrac{1}{2}y''^2 + by'^2 + \tfrac{1}{2}cy^2)'.$$

Le problème général sur les formes associées consiste à trouver *toutes les formes* G_0, *associées à une forme donnée* G_1. Je vais faire voir d'abord que ce problème se réduit à la recherche des formes dont l'ordre est moindre que celui de G_1.

Supposons G_0 d'ordre supérieur à celui de G_1, et soit $(2n+1)$ la différence des ordres, qui est nécessairement impaire.

En mettant dans l'expression (9) G_1 au lieu de y, composons la forme

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} H = {} & (aG_1)^{(2n+1)} + aG_1^{(2n+1)} \\ & + (bG_1)^{(2n-1)} + bG_1^{(2n-1)} + \ldots + (lG_1)' + lG_1. \end{aligned}\right.$$

Cette dernière H est associée à G_1, et du même ordre que la forme cherchée G_0.

Par un choix convenable de a, on abaissera l'ordre $(G_0 - H)$, en

faisant disparaître le terme de l'ordre le plus élevé. Mais $(G_0 - H)$ étant associée à G_1, son ordre surpasse celui de G_1 d'un nombre impair d'unités, $(2n-1)$ au plus. Par le choix de b on pourra donc réduire cette différence au-dessous de $(2n-1)$, puis, par le choix du coefficient suivant, au-dessous de $(2n-3)$, ..., enfin par le choix de l, $(G_0 - H)$ sera réduit à un ordre moindre que celui de G_0.

Donc *une forme quelconque* G_0 *associée à* G_1 *a pour expression* $H + G_2$, H *étant l'expression* (11) *et* G_2 *une forme associée à* G_1, *mais d'ordre inférieur à celui de* G_1.

La recherche directe de G_2, étant donnée G_1, constitue un problème de Calcul intégral sur lequel nous reviendrons. Mais actuellement je vais le résoudre indirectement en *construisant de la manière la plus générale deux formes associées.*

Pour ce but, employons un symbole distinctif qui représente la combinaison (9). Écrivons

$$(12)\quad \begin{cases} F(a, y) = (ay)^{(2n+1)} + ay'^{(2n+1)} \\ \qquad\qquad + (by)^{(2n-1)} + by'^{(2n-1)} + \ldots + (ly)' + ly', \end{cases}$$

en sous-entendant les coefficients $b, \ldots, l$, qui sont toujours quelconques et seront changés arbitrairement en même temps que a, sous-entendant aussi l'*ordre* $(2n+1)$, qui pourra changer aussi en même temps. Je vais employer une suite de pareils symboles $F(a_0, y)$, $F(a_1, y)$, ..., et il est entendu que l'ordre de *chacun* d'eux, $2n_0 + 1$, $2n_1 + 1$, ..., est quelconque, ainsi que les coefficients analogues à $b, \ldots, l$. Seul le *premier* coefficient a est rappelé par la notation.

Soient G_0, G_1 deux formes associées, la première de l'ordre le plus élevé. Nous avons démontré la relation

$$G_0 = F(a_0, G_1) + G_2,$$

où G_2 est associée à G_1, mais d'ordre inférieur. On a donc de même

$$G_1 = F(a_1, G_2) + G_3,$$
$$G_2 = F(a_2, G_3) + G_4$$

et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à une forme d'ordre zéro.

La suite se termine donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned} G_{r-2} &= F(a_{r-2}, G_{r-1}) + G_r, \\ G_{r-1} &= F(a_{r-1}, G_r), \\ G_r &= cy. \end{aligned}$$

Le dernier coefficient c, comme les précédents, est une fonction arbitraire de la variable indépendante.

Par ce moyen, le problème est résolu. Examinons un peu la solution. Le symbole $F(a, y)$, qui est d'ordre $(2n+1)$, contient seulement $(n+1)$ coefficients arbitraires, moins, par conséquent, de coefficients qu'il y a d'unités dans son ordre, sauf au cas $n=0$. D'autre part, G_0 a pour ordre la somme des ordres des symboles F employés. En comptant le dernier coefficient c, on voit que le nombre des fonctions arbitraires contribuant à composer les coefficients de G_0 ne surpasse pas d'une unité l'ordre de G_0, comme cela doit arriver pour une forme linéaire arbitraire ; sauf cependant le cas où tous les symboles F sont du premier ordre.

Nous devons donc considérer comme cas général celui où tous les symboles F sont de premier ordre

$$F(a, y) = (ay)' + ay' = 2ay' + a'y.$$

Quand il en est ainsi, la forme G_0 peut être envisagée comme arbitraire. Une forme G_0, construite avec des symboles F d'ordre supérieur à l'unité, a des propriétés particulières, dont nous reconnaîtrons quelques-unes. Mais on peut la construire aussi avec des symboles F d'ordre égal à l'unité.

Le mode de formation de G_0 par des symboles du premier ordre est le plus général, non seulement à cause du nombre des fonctions arbitraires qu'il entraîne, mais comme comprenant, en outre, à titre de cas particulier, l'autre mode. C'est ce que je vais prouver.

Supposons, dans l'échelle des formes G, que quelques-unes des dernières $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_{k+1}, G_k$ soient composées avec des symboles arbitraires, et les trois suivantes avec des symboles à coefficients infi-

niment grands ou infiniment petits, de cette manière :

$$G_{k-1} = \frac{1}{\varepsilon}(\alpha G_k)' + \frac{1}{\varepsilon}\alpha G'_k + G_{k+1},$$

$$G_{k-2} = \varepsilon^2[(aG_{k-1})^{(2n+1)} + aG_{k-1}^{(2n+1)} + \ldots + (lG_{k-1})' + lG'_{k-1}] + G_k.$$

$$G_{k-3} = -\frac{1}{\varepsilon}[(\alpha G_{k-2})' + \alpha G'_{k-2}] + G_{k-1}.$$

Nous supposons ε indépendant de la variable et infiniment petit. En employant la notation (12) et posant, pour abréger,

$$(\alpha G_k)' + \alpha G'_k = z.$$

nous avons pour limite de G_{k-3}

$$(13) \qquad G_{k-3} = -[\alpha F(a, z)]' - \alpha F'(a, z) + G_{k+1}.$$

La différence limite $G_{k-3} - G_{k+1}$, comme on le voit ici, est linéaire par rapport à G_k et ses dérivées, et de l'ordre $(2n+3)$. Je dis que c'est une forme associée à G_k. On a, en effet,

$$-[\alpha F(a, z)]' G_k \equiv F(a, z)\alpha G'_k,$$
$$-\alpha F'(a, z) \; G_k \equiv F(a, z)(\alpha G_k)';$$

d'où, en ajoutant membre à membre et d'après (13),

$$G_k(G_{k-3} - G_{k+1}) \equiv F(a, z)[\alpha G'_k + (\alpha G_k)'] = z\,F(a, z) \equiv 0.$$

On a donc

$$G_{k-3} = F(a_1, G_k) + G_{k+1},$$

avec $a_1 = -\frac{1}{4}a^2\alpha$, et

$$F(a_1, G) = (a_1, G_k)^{2n+3} + a_1 G_k^{2n+3} + (b_1 G_k)^{2n+1} + b_1 G_k^{2n+1} + \ldots.$$

Les coefficients $b_1, \ldots$ de cette forme sont liés d'une manière assez compliquée aux précédents, et nous n'avons pas à approfondir ces liaisons. Il suffit d'observer que les coefficients de cette forme d'ordre

$2n+3$ sont composés avec une fonction arbitraire α en plus des coefficients de la forme $F(a, z)$ d'ordre $2n+1$; elle peut donc être envisagée comme arbitraire relativement à son ordre. Donc une échelle contenant une forme d'ordre $2n+3$ peut être considérée comme la limite d'une échelle où cette forme est remplacée par trois autres, d'ordres respectivement égaux à $1, 2n+1, 1$. En répétant ce procédé, on voit qu'une échelle quelconque peut être considérée comme la limite d'une échelle où toutes les formes sont du premier ordre seulement.

Cette remarque est utile pour mettre en lumière les propriétés de l'échelle à l'égard des changements de variables. Soit

$$F(a, z) = (az)' + az'.$$

Nous avons

$$zF(a, z) = (az^2)'.$$

Changeons z en ρz, ρ étant une fonction quelconque de la variable; nous aurons de suite

$$\rho z F(a, \rho z) = z F(a\rho^2, z). \tag{14}$$

Prenons maintenant l'échelle des fonctions G, en supposant tous les F du premier ordre.

Soit, en mettant la variable y en évidence,

$$G_0(y), \quad G_1(y), \quad \ldots, \quad G_r(y),$$

la suite de ces fonctions.

Soit, d'autre part,

$$g_0(y), \quad g_1(y), \quad \ldots, \quad g_r(y)$$

la suite analogue construite en remplaçant les coefficients c, a_{r-1}, a_{r-2}, a_{r-3}, ... par c, $a_{r-1}\rho^2$, $a_{r-2}\frac{1}{\rho^2}$, $a_{r-3}\rho^2$, ... Nous aurons successivement

$$G_r(\rho y) = c\rho y = \rho g_r(y);$$

puis, d'après (14),

$$G_{r-1}(\rho y) = F(a_{r-1}, \rho g_r) = \frac{1}{\rho} F(a_{r-1}\rho^2, g_r) = \frac{1}{\rho} g_{r-1}(y);$$

puis, toujours d'après (14), où l'on change ρ en son inverse,

$$\begin{aligned} G_{r-2}(\rho y) &= F\left(a_{r-2}, \frac{1}{\rho} g_{r-1}\right) + G_r(\rho y) \\ &= \rho F\left(\frac{a_{r-2}}{\rho^2}, g_{r-1}\right) + \rho g_r = \rho g_{r-2}(y); \end{aligned}$$

et ainsi de suite. En résumé, si d'une part on construit la forme $G_0(y)$ avec les coefficients c, a_{r-1}, a_{r-2}, ..., a_0 et l'indéterminée y; d'autre part, la forme $g_0(y)$ avec les coefficients c, $a_{r-1}\rho^2$, $\frac{a_{r-2}}{\rho^2}$, $a_{r-3}\rho^2$, ... on a

$$G_0(\rho y) = \begin{cases} \rho g_0(y), & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \frac{1}{\rho} g_0(y), & \text{si } r \text{ est impair.} \end{cases}$$

Si l'on pose

$$G_0(y) = \mathcal{F}(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}, c, y).$$

cela s'exprime par l'équation

$$\mathcal{F}(a_0, a_1, \ldots, a_{r-1}, c, \rho y) = \begin{cases} \rho \mathcal{F}\left(\frac{a_0}{\rho^2}, a_1\rho^2, \ldots, a_{r-1}\rho^2, c, y\right) & (r \text{ pair}). \\ \frac{1}{\rho} \mathcal{F}\left(a_0\rho^2, \frac{a_1}{\rho^2}, \ldots, a_{r-1}\rho^2, c, y\right) & (r \text{ impair}). \end{cases}$$

Supposons $G_0(y)$ développé ainsi

$$G_0(y) = \alpha(y^{(r)} + \alpha_1 y^{(r-1)} + \ldots + \alpha_r y);$$

α sera égal à $2^{r-1} a_0 a_1 \ldots a_{r-1} c$.

Soit de même

$$g_0(y) = \beta(y^{(r)} + \beta_1 y^{(r-1)} + \ldots + \beta_r y);$$

on aura

$$\beta = \alpha, \qquad \text{si } r \text{ est pair},$$
$$\beta = \alpha\rho^2, \qquad \text{si } r \text{ est impair}.$$

Soit maintenant

$$G_0(\rho y) = \alpha\rho(y^{(r)} + A_1 y^{(r-1)} + \ldots + A_r y);$$

on aura, dans l'un et l'autre cas,

$$\alpha\rho(y^{(r)} + A_1 y^{(r-1)} + \ldots) = \alpha\rho(y^{(r)} + \beta_1 y^{(r-1)} + \ldots),$$

d'où

$$A_1 = \beta_1, \ldots, A_r = \beta_r.$$

Soit donc

$$\alpha_i = f_i(a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots)$$

l'expression de α_i au moyen des coefficients a; on aura, en même temps,

$$A_i = \beta_i = f_i\left(a_{r-1}\rho^2, a_{r-2}, \frac{1}{\rho^2}, \ldots\right).$$

Si inversement on exprime les a au moyen des coefficients α, de telle sorte qu'on ait

$$a_{r-s} = \varphi_{r-s}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r),$$

on aura aussi

$$a_{r-s} = \begin{cases} \frac{1}{\rho^2}\varphi_{r-s}(A_1, A_2, \ldots, A_r) & (s \text{ impair}), \\ \rho^2\varphi_{r-s}(A_1, A_2, \ldots, A_r) & (s \text{ pair}). \end{cases}$$

Ainsi, les a s'expriment, au facteur ρ^2 ou $\frac{1}{\rho^2}$ près, de la même manière au moyen des α ou des A. C'est une propriété d'*incariance* relative au changement de y en ρy. Nous allons en reconnaître une autre relative au changement de la variable indépendante.

Soit, en mettant en évidence la variable indépendante,

$$F(a, z) = F_x(a, z) = \frac{d}{dx}(az) + a\frac{dz}{dx}.$$

Prenons une nouvelle variable X, telle que l'on ait

$$\frac{dx}{dX} = \mu;$$

on aura

$$(15) \qquad F_X(a, z) = \mu F_x(a, z).$$

Composons, d'une part, la suite $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_0$ avec les coefficients $c, a_{r-1}, a_{r-2}, \ldots$ et la variable X, et, d'autre part, la suite $\gamma_r, \gamma_{r-1}, \ldots, \gamma_0$ avec les coefficients $c, a_{r-1}, a_{r-2}\mu^2, a_{r-3}, a_{r-4}\mu^2, \ldots$ et la variable x. On aura d'abord

$$G_r = \gamma_r;$$

puis

$$G_{r-1} = F_X(a_{r-1}, G_r) = \mu F_x(a_{r-1}, \gamma_r) = \mu\gamma_{r-1},$$
$$G_{r-2} = F_X(a_{r-2}, G_{r-1}) + G_r = \mu F_x(a_{r-2}, \mu\gamma_{r-1}) + \gamma_r.$$

Mais, d'après (14), où l'on remplace ρ par μ, ceci peut s'écrire

$$G_{r-2} = F_x(a_{r-2}\mu^2, \gamma_{r-1}) + \gamma_r = \gamma_{r-2}.$$

On aura ensuite

$$G_{r-3} = F_X(a_{r-3}, G_{r-2}) + G_{r-1} = \mu F_x(a_{r-3}, \gamma_{r-2}) + \mu\gamma_{r-1} = \mu\gamma_{r-3},$$

et ainsi de suite, en sorte que l'on a

$$G_{r-2k} = \gamma_{r-2k},$$
$$G_{r-2k-1} = \mu\gamma_{r-2k-1},$$

et, par conséquent,

$$G_0 = \begin{cases} \gamma_0, & \text{si } r \text{ est pair,} \\ \mu\gamma_0, & \text{si } r \text{ est impair;} \end{cases}$$

ou en employant l'algorithme $\mathcal{F}$ où nous mettons la variable en évidence

$$\mathcal{F}_X(a_0, a_1, \ldots, c, y) = \begin{cases} \mathcal{F}_x(a_0\mu^2, a_1, a_2\mu^2, \ldots, a_{r-1}, c, y) & (r \text{ pair}), \\ \mu\mathcal{F}_x(a_0, a_1\mu^2, \ldots, a_{r-1}, c, y) & (r \text{ impair}). \end{cases}$$

Par ces changements de variables, on peut réduire simultanément deux formes associées. Prenons le cas où la différence de leurs ordres est quelconque. Soit donc

$$G_1 = P\left(\frac{d^m Y}{dX^m} + P_1 \frac{d^{m-1} Y}{dX^{m-1}} + \ldots\right)$$

et

$$\begin{aligned} G_0 &= \frac{d^{2n+1}(aG_1)}{dX^{2n+1}} + a\frac{d^{2n+1}G_1}{dX^{2n+1}} + \ldots \\ &= 2aP\left(\frac{d^{m+2n+1}Y}{dX^{m+2n+1}} + Q_1 \frac{d^{m+2n}Y}{dX^{m+2n}} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Le coefficient Q_1 aura pour valeur

$$(16) \qquad Q_1 = P_1 + (2n+1)\left(\frac{1}{P}\frac{dP}{dX} + \frac{1}{2a}\frac{da}{dX}\right).$$

En posant

$$Y = \rho y, \qquad \frac{dx}{dX} = \mu,$$

G_1 sera transformé en

$$P\rho\mu^m\left(\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots\right) = g_1,$$

le coefficient p_1 ayant la valeur suivante :

$$p_1 = \frac{1}{\mu}\left[P_1 + \frac{m}{\rho}\frac{d\rho}{dX} + \frac{m(m-1)}{2\mu}\frac{d\mu}{dX}\right].$$

Quant à G_0, il est changé en

$$2aP\rho\mu^{m+2n+1}\left(\frac{d^{m+2n+1}y}{dx^{m+2n+1}} + q_1 \frac{d^{m+2n}y}{dx^{m+2n}} + \ldots\right),$$

expression que nous représenterons par μg_0.

Puisque $G_0 G_1$ est une dérivée exacte par rapport à X, telle que $\frac{d\Phi}{dX}$, $g_0 g_1 = \frac{d\Phi}{\mu dX} = \frac{d\Phi}{dx}$ sera dérivée exacte par rapport à x, et g_0, g_1 seront deux formes associées.

La transformée g_1 manquera de second terme si l'on pose

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dX} + \frac{m-1}{2\mu}\frac{d\mu}{dX} = -\frac{1}{m}P_1;$$

d'où

$$\rho\mu^{\frac{m-1}{2}} = e^{-\frac{1}{m}\int P_1 dX},$$

Achevons de déterminer ρ et μ par cette seconde égalité

$$P\rho\mu^m = \frac{1}{2aP\rho\mu^{m+2n}},$$

dont nous désignerons les deux membres par p. Il viendra

$$g_1 = p\left(\frac{d^m y}{dx^m} + \ldots\right),$$

$$g_0 = \frac{1}{p}\left(\frac{d^{m+2n+1}y}{dx^{m+2n+1}} + \ldots\right)$$

$$= \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\left(\frac{1}{2p^2}g_1\right) + \frac{1}{2p^2}\frac{d^{2n+1}y}{dx^{2n+1}} + \ldots.$$

Le coefficient q_1 du second terme de g_0 sera donné par la formule (16), où l'on remplace X, Y, P, P_1, a, par x, y, p, o, $\frac{1}{2p^2}$; d'où

$$q_1 = (2n+1)\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dx} + \frac{2p^2}{2}\frac{d\frac{1}{2p^2}}{dx}\right) = 0.$$

Ainsi les deux formes g_0, g_1 manqueront toutes deux du second terme, et les coefficients des premiers termes seront réciproques.

Il est maintenant loisible de prendre, au lieu de g_1 et g_0, les deux formes $Y_1 = \frac{1}{p}g_1$ et $Y_0 = pg_0$; on obtiendra ainsi les deux formes réduites

$$\gamma_1 = \frac{d^m y}{dx^m} + p_2\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \ldots,$$

$$\gamma_0 = \frac{d^{m+2n+1}y}{dx^{m+2n+1}} + q_2\frac{d^{m+2n-1}y}{dx^{m+2n-1}} + \ldots.$$

Exemple. — Si l'une des formes associées est du premier ordre, on peut la supposer réduite à y', et son associée réduite à la forme

$$y^{2n} + (by')^{2n-3} + \ldots.$$

Si la forme G est d'ordre zéro, on peut la réduire à y sans changer la variable indépendante. Donc, quelle que soit la variable x, on peut ramener G_0 à

$$G_0 = y^{2n+1} + (by)^{2n-1} + by^{2n-1} + \ldots + (ly)' + ly'.$$

Voici une des propriétés les plus curieuses des suites composées comme il vient d'être dit.

Dans la relation (4) supposons m impair; on aura, en mettant η au lieu de a,

$$\eta y^{2n+1} + y\eta^{2n+1} \equiv 0.$$

Remplaçons y par ay, nous aurons

$$(\eta ay)^{2n+1} + ay\eta^{2n+1} \equiv 0.$$

Échangeons η et y et inversons les deux termes ainsi

$$\eta ay^{(2n+1)} + y(a\eta)^{2n+1} \equiv 0$$

et ajoutons membre à membre. Voici le résultat

$$\eta[(ay)^{2n+1} + ay^{(2n+1)}] \equiv -y[(a\eta)^{2n+1} + a\eta^{2n+1}].$$

Par conséquent, le symbole général (12) a la propriété

$$\eta F(a, y) \equiv -y F(a, \eta). \tag{17}$$

Ceci posé, prenons simultanément les deux suites

$$\begin{array}{ll}
G_r = cy, & \Gamma_r = c\eta, \\
G_{r-1} = F(a_{r-1}, G_r), & \Gamma_{r-1} = F(a_0, \Gamma_r), \\
G_{r-2} = F(a_{r-2}, G_{r-1}) + G_r, & \Gamma_{r-2} = F(a_1, \Gamma_{r-1}) + \Gamma_r, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
G_0 = F(a_0, G_1) + G_2, & \Gamma_0 = F(a_{r-1}, \Gamma_1) + \Gamma_2.
\end{array}$$

où l'ordre des opérations est renversé, les symboles F étant d'ailleurs d'ordre quelconque.

Considérons maintenant le produit

$$G_k \Gamma_{r-k}.$$

Nous aurons

$$G_k = F(a_k, G_{k+1}) + G_{k+2}.$$

Par suite, d'après (17),

$$G_k \Gamma_{r-k} = G_{k+2} \Gamma_{r-k} + \Gamma_{r-k} F(a_k, G_{k+1}) \equiv G_{k+2} \Gamma_{r-k} - G_{k+1} F(a_k, \Gamma_{r-k}).$$

Mais, d'après la loi de formation des Γ, on a

$$F(a_k, \Gamma_{r-k}) = \Gamma_{r-k-1} - \Gamma_{r-k+1}.$$

Donc

$$G_k \Gamma_{r-k} - G_{k+1} \Gamma_{r-k+1} \equiv -(G_{k+1}, \Gamma_{r-k-1} - G_{k-2} \Gamma_{r-k}).$$

Ainsi, posant

$$\varphi_k = G_k \Gamma_{r-k} - G_{k+1} \Gamma_{r-k+1},$$

on a

$$\varphi_k \equiv -\varphi_{k+1};$$

d'où, généralement,

$$\varphi_h \equiv (-1)^{h-k} \varphi_h.$$

Soit $k = 0$, alors Γ_{r+1} étant nul, on a

$$\varphi_0 = G_0 \Gamma_r = e\eta G_0.$$

Soit semblablement $h = r$, on a

$$\varphi_h = G_r \Gamma_0 = e\gamma \Gamma_0.$$

Par conséquent

$$e\eta G_0 \equiv (-1)^r e\gamma \Gamma_0.$$

Faisons

$$cG_0 = G(y), \qquad c\Gamma_0 = \Gamma(\eta),$$

cette relation s'écrit

$$(18) \qquad \eta G(y) + (-1)^{r-1} y \Gamma(\eta) \equiv 0.$$

Dans cette formule, r est l'ordre des deux formes G, Γ, si tous les symboles F sont du premier ordre. Dans le cas général, r diffère de cet ordre d'un nombre pair, en sorte que la relation (18) a lieu toujours, en y désignant par r l'ordre commun aux deux formes $G(y)$ et $\Gamma(\eta)$.

Étant donné $G(y)$, il n'existe qu'une forme $\Gamma(\eta)$ donnant lieu à la relation (18); car, s'il en existait une seconde, $\Gamma(\eta) + \Psi(\eta)$, on en conclurait que $y\Psi(\eta)$ est une différentielle exacte, y et η restant arbitraires, ce qui est impossible, puisque ce produit ne contient pas la dérivée de y.

On pourrait donc déduire $\Gamma(\eta)$ de $G(y)$ par tout autre moyen, sans changer le résultat.

Or soit

$$G(y) = g_0 y^{(m)} + g_1 y^{(m-1)} + \ldots.$$

On a

$$\eta g_{m-p} y^{(p)} \equiv (-1)^p y (g_{m-p}\eta)^{(p)}.$$

et par conséquent

$$(19) \qquad \Gamma(\eta) = (g_0\eta)^{(m)} - (g_1\eta)^{(m-1)} + (g_2\eta)^{(m-2)} - \ldots.$$

et l'on reconnaît la forme $\Gamma(\eta)$, adjointe de $G(y)$, telle que Lagrange l'a découverte.

Ainsi, ayant une suite $G_r, G_{r-1}, \ldots, G_0$, si l'on pose $G(y) = cG_0$; si, d'autre part, avec les mêmes opérations faites dans un ordre inverse, on construit une suite $\Gamma_r, \Gamma_{r-1}, \ldots, \Gamma_0$; si l'on pose enfin $\Gamma(\eta) = c\Gamma_0$, les deux formes $G(y)$ et $\Gamma(\eta)$ seront adjointes.

Par ce moyen, on reconnaît qu'il y a des formes identiques à leurs adjointes. Pour les composer, il suffit de supposer la suite des symboles

F symétrique par rapport à son milieu. Si l'ordre r est impair, en supposant $\eta = y$, on aura

$$2yG(y) \equiv 0.$$

Donc les formes d'ordre impair qui sont leurs propres adjointes sont associées à y. Dans le cas où r est pair, on ne voit pas de propriété immédiate.

Rectification au sujet du Mémoire sur les équations aux dérivées partielles ;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Je voudrais faire une rectification au sujet du Mémoire qu'on vient de lire au commencement de ce Cahier. Quoique l'erreur ne porte que sur un point bien spécial de ce Mémoire, et qui n'était pour ainsi dire qu'indiqué comme devant être le sujet d'une étude ultérieure, je tiens à la signaler dès aujourd'hui.

On lit dans le n° 3 du Chapitre IV :

« Nous obtenons ainsi deux suites de fonctions

$$v'_1, \quad v'_2, \quad \ldots, \quad v'_n, \quad \ldots$$
$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots$$

Nous avons, au Chapitre III, rencontré deux suites présentant avec celles-ci une grande analogie. En appliquant absolument le même genre de considérations, on établit... »

Cette affirmation n'est pas exacte; je me suis laissé induire en erreur par une analogie superficielle, et, d'une manière générale, la convergence de ces suites ne peut être prouvée. Les applications du n° 3 faites dans les n°s 5 et 6 n'ont dès lors aucune valeur. Les problèmes qui y étaient indiqués sont donc à reprendre : c'est ce que je compte faire prochainement; ils devront d'ailleurs être posés d'une manière un peu différente.

En résumé, je prie le lecteur de faire abstraction des n°s 3, 5, 6 du Chapitre IV.

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie [suite (¹)];

PAR M. GEORGES HUMBERT.

DEUXIÈME PARTIE (²).

38. Les théories analytiques exposées dans la première Partie de ce Mémoire donnent lieu à des applications géométriques nombreuses et variées. Parmi ces applications, celles qui reposent sur la considération d'intégrales abéliennes simples appartenant à une courbe plane ou gauche rentrent dans le même cadre que les questions traitées par nous dans un travail antérieur publié dans ce Journal (³); aussi n'avons-nous pas jugé utile d'y revenir.

C'est donc uniquement sur les problèmes où interviennent des inté-

(¹) Voir *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. V, p. 81.

(²) A la fin du nº 30 de la première Partie de ce Mémoire, p. 121 du t. V du *Journal*, s'est glissée une erreur qu'il importe de rectifier. *Au lieu de :* « chaque élément de l'intégrale $J\frac{Q}{Sf'_z}dX\,dY$ figure multiplié par $(-1)^{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial z}\Delta}$ », *il faut lire :* « chaque élément de l'intégrale J $\left(\text{c'est-à-dire } \frac{Q}{Sf'_z}dX\,dY\right)$ figure avec le signe de $\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial z}\Delta$ ».

(³) Voir *Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. III, p. 327.

grales abéliennes multiples que nous avons insisté : on trouvera, par exemple, dans le présent Mémoire, des propositions géométriques nouvelles sur les aires planes et sphériques, sur les volumes limités par des surfaces algébriques, et une série assez étendue de théorèmes sur les aires ellipsoïdales, théorèmes qui conduisent à une généralisation intéressante des résultats célèbres de Graves et Chasles sur les arcs d'ellipse. Les propriétés des aires sur l'ellipsoïde ont été jusqu'ici à peine effleurées par les géomètres; nous ne connaissons sur ce sujet, en dehors des travaux relatifs à l'aire totale de la surface, que les recherches de Jellett et de Lebesgue, qui ont donné l'expression, à l'aide des intégrales elliptiques, d'aires ellipsoïdales limitées par des courbes algébriques, d'ailleurs très particulières. Nous démontrons qu'on peut déterminer simplement sur l'ellipsoïde une infinité de courbes algébriques à deux boucles fermées, comprenant entre elles une aire réductible aux fonctions elliptiques et, sur une quadrique quelconque, une infinité d'aires dont la somme algébrique s'exprime à l'aide de fonctions rationnelles et logarithmiques. Ce sujet étant nouveau, nous avons cru devoir le développer assez longuement, et il constitue la partie principale du présent Mémoire. L'emploi des fonctions elliptiques nous a permis de pousser les calculs jusqu'au bout.

Le dernier Chapitre, qui est très court, est consacré à l'extension de quelques-unes de ces propriétés aux aires sur une surface algébrique quelconque.

I. — Aires planes et volumes.

39. Soient deux systèmes de courbes algébriques planes

$$\Phi(X, Y, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, v) = 0,$$

de degrés n et p.

Deux courbes voisines du premier système et deux courbes voisines du second comprennent entre elles np quadrilatères curvilignes infiniment petits; la somme algébrique de leurs aires se calcule d'après les formules du n° **30**, en partant de l'intégrale $\int\int dX\,dY$; elle a pour

expression

$$du\,dv\sum\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Delta},$$

la somme s'étendant aux points communs aux courbes $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, et Δ étant le jacobien de Φ et de Ψ.

On en déduit, par l'application des raisonnements et des théorèmes des nos **34** et **35**, les propositions suivantes, dont quelques-unes ont été déjà démontrées par nous, à l'aide de considérations différentes [1].

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes asymptotes et deux courbes asymptotiques quelconques est nulle.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables appartenant à un système algébrique

$$\Phi(X, Y, u) = 0,$$

et deux courbes également variables appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotes entre elles,

$$\Psi_1 + vt^2\Psi_2 = 0 \quad [2],$$

est une fonction rationnelle et logarithmique de u, et une fonction entière, du premier degré, de v.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables, appartenant à un système algébrique,

$$\Phi(X, Y, u) = 0,$$

et deux courbes également variables appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotiques, $\Psi_1 + vt\Psi_2 = 0$, est une fonction

---

(1) *Sur le théorème d'Abel* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. III, p. 354).

(2) t désigne la variable d'homogénéité.

rationnelle et logarithmique de u, et une fonction entière, du second degré, de v.

La somme algébrique des aires planes comprises entre deux courbes variables, appartenant à un faisceau ponctuel de courbes asymptotiques, et deux courbes également variables, appartenant aussi à un faisceau analogue, est une fonction entière des paramètres des deux faisceaux.

Dans toutes ces propositions on suppose que les courbes d'un des systèmes n'ont pas de point fixe commun à l'infini avec les courbes de l'autre.

40. On a des théorèmes tout à fait analogues pour les *volumes* dans l'espace.

Soient trois systèmes de surfaces algébriques

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0,$$
$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$
$$\Theta(X, Y, Z, w) = 0;$$

la somme algébrique des volumes compris entre trois de ces surfaces et trois surfaces respectivement voisines est

$$du\,dv\,dw \sum \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}\,\frac{\partial\Theta}{\partial w}}{\Delta},$$

la somme s'etendant aux points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\Theta = 0$, et Δ étant le jacobien de Φ, Ψ, Θ.

On en conclut que :

La somme algébrique des volumes compris entre deux surfaces asymptotes, deux autres surfaces également asymptotes et deux surfaces quelconques de même degré est nulle.

De même, est nulle aussi la somme des volumes compris entre

deux surfaces asymptotiques, deux autres surfaces également asymptotiques et deux surfaces asymptotes quelconques, etc. (¹).

Nous entendons par *surfaces asymptotiques* des surfaces qui ont mêmes points à l'infini, et par *surfaces asymptotes* des surfaces qui ont mêmes plans tangents en tous les points à l'infini.

La somme des volumes compris entre deux surfaces fixes de même degré, deux autres surfaces fixes également de même degré et deux surfaces variables, appartenant à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotes (asymptotiques), $\Phi + ut^h\Phi = 0$, *est une fonction entière, du premier (du troisième) degré en* u ($h = 2$ ou 1).

On suppose que les surfaces des trois systèmes n'ont pas constamment de point commun à l'infini.

41. Nous allons chercher, en revenant à la question des aires planes, comment varie la somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même, par le solide compris entre deux surfaces de même degré et deux autres surfaces également de même degré. Soient

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0, \qquad \Psi(X, Y, Z, v) = 0$$

deux systèmes de surfaces, et un plan parallèle à XOY, $Z = h$. On a (n° **30**), pour la somme des aires découpées sur le plan par quatre surfaces u_0 et u, v_0 et v, l'expression

$$K = \int_{u_0}^{u}\int_{v_0}^{v} du\,dv \sum \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Delta}.$$

(¹) On déduit de là que *la somme des volumes compris à l'intérieur d'un cylindre à base fermée, entre deux surfaces asymptotes, est nulle*, parce qu'on peut découper le cylindre en tranches infiniment petites comprises entre deux séries de plans, parallèles aux génératrices et respectivement parallèles entre eux dans chaque série. Les plans de chaque série forment en effet un système de surfaces asymptotiques. La courbe de base du cylindre peut être algébrique ou transcendante.

Or, d'après la formule (8) du n° **20**, où l'on doit faire $k = 3$, il vient

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{(\zeta - h\theta)[\Phi'_\eta \Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta \Psi'_\eta]}.$$

La somme du second membre s'étend cette fois aux points communs, à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$; η et ζ sont des fonctions de u, v, θ définies par $\Phi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$; $\Psi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$, et l'on doit faire finalement $\theta = 0$ (¹). On voit alors que h figurera au second degré au numérateur et disparaîtra au dénominateur de la quantité sous le signe $\int\int$; il en résulte que K est de la forme

$$\mathfrak{M} + \mathfrak{N} h + \mathfrak{P} h^2.$$

Donc :

La somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même, par le solide compris entre deux surfaces de même degré, et deux autres surfaces également de même degré, est proportionnelle au produit des distances du plan mobile à deux plans fixes de même direction.

Si les surfaces $\Phi = 0$ forment un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques, on peut poser

$$\Phi = \Phi_1 + ut\Phi_2;$$

$\frac{\partial\Phi}{\partial u}$ est alors égal à $t\Phi_2$, et, par suite, $k = 2$ (n° **20**). Il vient alors

$$K = \int\int du\, dv \sum \frac{d}{d\theta} \frac{\frac{\partial\Psi}{\partial v}\Phi_2}{(\zeta - h\theta)[\Phi'_\eta \Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta \Psi'_\eta]},$$

et par suite K est du premier degré en h; si

$$\Phi = \Phi_1 + ut^2\Phi_2,$$

(¹) Rappelons que η, ζ, θ désignent respectivement $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{t}{x}$; x, y, z, t étant des variables d'homogénéité, telles que $Xt = x$; $Yt = Y$; $Zt = z$.

K est une constante en h. Il en est de même si

$$\Phi = \Phi_1 + ut\Phi_2 \qquad \text{et} \qquad \Psi = \Psi_1 + vt\Psi_2.$$

Ainsi :

La somme des aires découpées sur un plan qui se déplace parallèlement à lui-même par le solide compris entre deux surfaces asymptotes (asymptotiques) et deux surfaces de même degré quelconques (asymptotiques) est constante.

Si les deux premières surfaces sont asymptotiques, les deux dernières étant quelconques, la somme en question est proportionnelle à la distance du plan mobile à un plan fixe de même direction.

II. — Aires sphériques.

42. La somme des aires comprises sur la sphère S,

$$S = X^2 + Y^2 + Z^2 - R^2 = 0,$$

entre deux surfaces d'un premier système

$$\Phi(X, Y, Z, u) = 0$$

et deux surfaces d'un second système

$$\Psi(X, Y, Z, v) = 0,$$

a pour expression

$$K = R \int\int du\, dv \sum \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\,\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Delta},$$

on le voit en partant de l'intégrale qui donne l'aire sphérique

$$J = \int\int \frac{dX\, dY}{Z} \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = R \int\int \frac{dX\, dY}{Z}.$$

Dans l'expression de K, la somme est étendue aux points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $S = 0$, et Δ est le jacobien de Φ, Ψ, S.

Il est à remarquer ici que le dénominateur de l'expression sous le signe $\sum$ est de degré inférieur, en général, d'une unité seulement au numérateur, et non pas de deux unités comme dans le cas des aires planes, ou de trois comme dans celui des volumes; cela tient à ce que le radical $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$ est une constante sur toute la sphère. Il en résulte les conséquences suivantes, toujours par l'application des théorèmes des n^{os} **34** et **35**.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces quelconques de même degré et deux surfaces asymptotes est nulle.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces asymptotiques et deux autres surfaces également asymptotiques est nulle.

La somme des aires comprises sur une sphère entre deux surfaces variables appartenant à un système algébrique, $\Phi(X, Y, Z, u) = 0$ *et deux surfaces également variables appartenant à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques,* $\Psi_1 + v\Psi_2 = 0$, *est une fonction rationnelle et logarithmique de* u, *et une fonction entière du premier degré de* v.

On suppose que les surfaces des deux systèmes n'ont pas constamment de point commun sur le cercle à l'infini.

43. Il est intéressant d'étudier la forme sous laquelle les coefficients de l'équation de la sphère figurent dans les expressions précédentes.

On a, d'après la formule (8) du n° **20**, en y faisant $k = 2$,

$$R\sum \frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Delta} = R\sum \frac{d}{d\theta}\frac{\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{\partial\Psi}{\partial v}}{(1+\eta^2+\zeta^2-R^2\theta^2)[\Phi'_\eta\Psi'_\zeta-\Phi'_\zeta\Psi'_\eta]},$$

la somme du second membre s'étendant aux points communs à $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$. Plus généralement, si la sphère a pour équation

$$(X-\alpha)^2+(Y-\beta)^2+(Z-\gamma)^2-R^2=0,$$

on aura, au dénominateur, au lieu de $1+\eta^2+\zeta^2-R^2\theta^2$, l'expression

$$(1-\alpha\theta)^2+(\eta-\beta\theta)^2+(\zeta-\gamma\theta)^2-R^2\theta^2.$$

Dans le second membre de la relation précédente, η et ζ sont des fonctions de u, v et θ définies par $\Phi(1, \eta, \zeta, \theta, u) = 0$, $\Psi(1, \eta, \zeta, \theta, v) = 0$ et l'on doit, dans le résultat final de la dérivation, faire $\theta = 0$. Il en résulte que l'expression à dériver par rapport à θ se compose de deux facteurs, l'un

$$\mathfrak{B} = \frac{\dfrac{\partial\Phi}{\partial u}\dfrac{\partial\Psi}{\partial v}}{\Phi'_\eta\Psi'_\zeta - \Phi'_\zeta\Psi'_\eta}$$

est indépendant des coefficients de la sphère; l'autre seul

$$\frac{1}{(1-\alpha\theta)^2 + (\eta - \beta\theta)^2 + (\zeta - \gamma\theta)^2 - R^2\theta^2}$$

dépend de α, β, γ, R. Par suite, le résultat de la dérivation, en y faisant $\theta = 0$, est de la forme

$$\frac{\mathfrak{A}}{1+\eta^2+\zeta^2} + \frac{2\mathfrak{B}}{(1+\eta^2+\zeta^2)^2}\left[\alpha + \eta(\beta - \eta'_\theta) + \zeta(\gamma - \zeta'_\theta)\right].$$

$\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ étant indépendants de α, β, γ, R, ainsi que η, ζ, η'_θ et ζ'_θ. Il en résulte que la somme des aires comprises sur la sphère entre deux surfaces fixes du premier système et deux surfaces fixes du second est de la forme

$$2R(\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \varpi) \quad \text{ou} \quad 2R\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}\,\frac{\lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma + \varpi}{\sqrt{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}},$$

λ, μ, ν, ϖ étant fixes. En d'autres termes, on a ce théorème intéressant et très général, tout à fait analogue à une proposition que nous avons fait connaître au tome IV de ce Journal, pour les aires découpées sur une sphère par une surface conique ou une surface réglée [1] :

Soient deux surfaces quelconques de même degré p, et deux autres surfaces également de même degré q. La somme algébrique des $2pq$ aires que ce système découpe sur une sphère de rayon R est égale à $2\rho Rd$; ρ étant un coefficient dépendant de la nature du système des surfaces primitives, et d désignant la distance du centre de la sphère à un plan, lié invariablement à ce système.

---

[1] *Journal de Mathématiques*. 4e série, t. IV, p. 319.

44. La quantité que nous avons désignée par $\mathfrak{B}$ s'annule en tous les points communs aux surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $\theta = 0$, si $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$, par exemple, est divisible par θ; cela arrive en particulier lorsque les surfaces $\Phi = 0$ appartiennent à un faisceau ponctuel de surfaces asymptotiques $\Phi_1 + ut\Phi_2 = 0$, puisque alors $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \theta \Phi_2(1, \eta, \zeta, \theta)$: il faut toutefois que $1 + \eta^2 + \zeta^2$ reste fini, c'est-à-dire que les surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ n'aient aucun point commun sur le cercle à l'infini.

En excluant, comme plus haut, ce cas particulier, nous pouvons dire, puisque, si $\mathfrak{B}$ est nul, α, β, γ disparaissent dans K, que :

Un système composé de deux surfaces de même degré et de deux surfaces asymptotiques découpe sur une sphère des aires dont la somme algébrique reste fixe, pour toute position de la sphère dans l'espace.

Cette somme est d'ailleurs proportionnelle au rayon.

Pour appliquer ce théorème et le précédent, on ne doit pas oublier qu'un certain nombre des aires considérées peuvent être imaginaires, et qu'elles sont en tout au nombre de $2pq$, p et q étant les degrés des systèmes de surfaces sécantes.

45. Exemples. — Imaginons qu'on déforme homographiquement un tore annulaire sous la condition que les sections normales à l'axe deviennent des couples d'ellipses situées dans des plans parallèles : on obtient une surface Σ, qui découpe sur une sphère quatre aires fermées dont la somme algébrique ne dépend pas de la position de la sphère.

Car on peut décomposer l'anneau obtenu en anneaux infiniment petits, compris respectivement entre deux des plans parallèles de la série considérée, et deux cylindres ayant pour bases sur ces plans des ellipses; le théorème étant vrai, par ce qui précède, pour un de ces anneaux, est vrai pour l'anneau total.

On obtient un système jouissant de la même propriété en considérant le solide limité par deux ellipsoïdes, dont l'un est intérieur à l'autre, et par deux plans parallèles; et, plus généralement, toute surface engendrée par une conique dont le plan reste parallèle à un plan fixe.

De même, on peut prendre le solide limité par deux ellipsoïdes homothétiques et deux plans quelconques.

46. Des propositions analogues s'obtiendraient pour les *surfaces de direction*, c'est-à-dire telles qu'en chacun de leurs points le radical $\sqrt{f_x'^2 + f_y'^2 + f_z'^2}$ soit égal à une fonction rationnelle; nous nous réservons de revenir sur cette question dans un autre travail.

III. — Aires ellipsoïdales.

Zones ellipsoïdales à bases planes.

47. Les formules démontrées dans la première Partie de ce Mémoire conduisent également à des résultats remarquables relatifs à certaines aires ellipsoïdales, limitées par des courbes algébriques: mais, avant d'aborder la question dans toute sa généralité, il nous sera utile d'établir directement le plus simple de ces résultats, en nous appuyant sur des considérations géométriques élémentaires.

La proposition que nous avons en vue est relative à l'aire comprise sur un ellipsoïde quelconque entre deux sections planes, le long desquelles on peut circonscrire à l'ellipsoïde un cône de révolution; on sait que les pôles de ces sections planes, c'est-à-dire les sommets des cônes de révolution circonscrits, ont pour lieu l'hyperbole focale.

Soit donc E l'ellipsoïde

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (a > b > c);$$

l'hyperbole focale a pour équations

$$y = 0, \qquad \frac{x^2}{a^2 - b^2} - \frac{z^2}{b^2 - c^2} = 1.$$

Le plan polaire P d'un point (x, z) de cette hyperbole a pour équation

$$\frac{Xx}{a^2} + \frac{Zz}{c^2} - 1 = 0.$$

Proposons-nous d'évaluer l'aire de la zone ellipsoïdale comprise entre ce plan et le plan polaire P′, d'un point $(x + dx, z + dz)$ infiniment voisin du premier sur l'hyperbole focale.

A cet effet, projetons la zone sur un plan normal à l'axe du cône de révolution de sommet (x, z) circonscrit à l'ellipsoïde E : il est clair que l'aire de la projection est égale à la différence des aires des projections, sur le même plan, des sections planes faites dans E par les plans P et P′. Or, en appelant $d\sigma$ l'aire de la zone, et θ l'angle que les plans tangents à l'ellipsoïde le long de la section P font avec l'axe du cône, on a pour la zone projetée la valeur $d\sigma \sin\theta$; d'autre part, en désignant par ω l'aire de la section P, par $\omega + d\omega$ celle de la section P′, par λ et λ' les angles des plans P et P′ avec l'axe du cône, il viendra

$$d\sigma \sin\theta = (\omega + d\omega)\sin\lambda' - \omega \sin\lambda.$$

L'axe du cône est, comme on sait, la tangente en (x, z) à l'hyperbole focale; ses équations sont donc

$$Y = 0, \qquad \frac{Xx}{a^2 - b^2} - \frac{Zz}{b^2 - c^2} = 1$$

et, par suite,

$$\sin\lambda = \frac{c^2(a^2 - b^2)xz + a^2(b^2 - c^2)xz}{\sqrt{(c^4x^2 + a^4z^2)[(a^2 - b^2)^2z^2 + (b^2 - c^2)^2x^2]}}$$

et

$$\sin\lambda' = \frac{c^2(a^2 - b^2)(x + dx)z + a^2(b^2 - c^2)(z + dz)x}{\sqrt{[c^4(x + dx)^2 + a^4(z + dz)^2][(a^2 - b^2)^2z^2 + (b^2 - c^2)^2x^2]}}.$$

Posons, pour abréger,

$$G = (a^2 - b^2)^2 z^2 + (b^2 - c^2)^2 x^2,$$
$$H = c^4x^2 + a^4z^2,$$

et développons $\sin\lambda'$ suivant les puissances croissantes de dx et dz; il vient

$$\sin\lambda' = \sin\lambda + \frac{c^2z(a^2 - b^2)\,dx}{G^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}}$$
$$+ \frac{a^2x(b^2 - c^2)\,dz}{G^{\frac{1}{2}}H^{\frac{1}{2}}} - \frac{b^2(a^2 - c^2)}{G^{\frac{1}{2}}H^{\frac{3}{2}}}xz(c^4x\,dx + a^4x\,dz).$$

$\sin\theta$ se calcule sans difficulté, et l'on trouve

$$\sin\theta = \frac{b}{G^{\frac{1}{2}}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On a donc $d\sigma$, au second ordre près, par la formule

$$\begin{aligned} &b(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma \\ &\quad = b^2(a^2 - c^2)\frac{xz}{H^{\frac{1}{2}}} d\omega + \frac{\omega}{H^{\frac{1}{2}}}[c^2(a^2 - b^2)z\,dx + a^2(b^2 - c^2)x\,dz] \\ &\qquad - \frac{\omega}{H^{\frac{3}{2}}} b^2(a^2 - c^2)xz(c^4 x\,dx + a^4 z\,dz). \end{aligned}$$

L'aire ω de la section de l'ellipsoïde par le plan P a pour valeur

$$\omega = \pi\,\frac{bH^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}}E.$$

en posant

$$E = c^2x^2 + a^2z^2 - a^2c^2,$$
$$A = c^2x^2 + a^2z^2.$$

On en déduit

$$d\omega = \frac{\pi b}{H^{\frac{1}{2}}A^{\frac{5}{2}}}(AH.dA + \tfrac{1}{2}AE.dH - \tfrac{3}{2}EH.dA),$$

puisque $dE = dA$; on peut écrire, en introduisant ω,

$$d\omega = \frac{\omega}{AHE}(AH.dA + \tfrac{1}{2}AE.dH - \tfrac{3}{2}EH.dA).$$

Transportant cette valeur dans l'expression de $d\sigma$, il vient, en remarquant que la quantité $c^4x\,dx + a^4z\,dz$ est égale à $\frac{1}{2}dH$.

$$\begin{aligned} &b(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}} d\sigma \\ &\quad = \frac{\omega}{H^{\frac{1}{2}}}[c^2(a^2 - b^2)z\,dx + a^2(b^2 - c^2)x\,dz] \\ &\qquad + \frac{\omega}{AEH^{\frac{3}{2}}} b^2(a^2 - c^2)xz(AH.dA - \tfrac{3}{2}EH.dA). \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}d\sigma$$
$$=\frac{\pi}{A^{\frac{5}{2}}}[AEc^2(a^2-b^2)z\,dx+AEa^2(b^2-c^2)x\,dz$$
$$+\tfrac{1}{2}b^2(a^2-c^2)xz(3a^2c^2-A)dA].$$

On peut exprimer dA en fonction de dx et dz, et ensuite dz en fonction de dx, puisque x et z sont liés par l'équation

$$(2)\qquad \frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1;$$

il vient ainsi, après un calcul facile, en remarquant que $A=E+a^2c^2$,

$$\frac{d\sigma}{\pi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}=a^2c^2\frac{dx}{zA^{\frac{5}{2}}}[2A^2-A(b^4-3a^2b^2-3b^2c^2+5a^2c^2)$$
$$-3a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)].$$

48. On a donc, puisque x et z sont liés par la relation (2), une différentielle elliptique en x; il est aisé de la réduire.

Des identités

$$b^2\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}d\left(\frac{xz}{A^{\frac{3}{2}}}\right)=\frac{dx}{zA^{\frac{5}{2}}}[-A^2-2A(a^2b^2+b^2c^2-2a^2c^2)$$
$$+3a^2c^2(a^2-b^2)(b^2-c^2)]$$

et

$$\frac{b^2}{a^2c^2}\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}d\left(\frac{xz}{A^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{dx}{zA^{\frac{3}{2}}}\left[\frac{A^2}{a^2c^2}+(a^2-b^2)(b^2-c^2)\right],$$

on conclut

$$\frac{d\sigma}{\pi}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2-c^2}}+b^2\frac{a^2-c^2}{b^2-c^2}\left(a^2c^2\,d\frac{xz}{A^{\frac{3}{2}}}-d\frac{xz}{A^{\frac{1}{2}}}\right)=\frac{-dx}{zA^{\frac{1}{2}}}(c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2)$$

et, si l'on pose

$$(3)\qquad S=\pi b^2\frac{a^2-c^2}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left(\frac{xz}{A^{\frac{1}{2}}}-a^2c^2\frac{xz}{A^{\frac{3}{2}}}\right),$$

il vient

$$(4)\qquad dS - d\sigma = \pi\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-b^2}}\,\frac{dx}{zA^{\frac{1}{2}}}(c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2),$$

x et z étant liés par la relation $\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{z^2}{b^2-c^2}=1$, et A étant égal à $c^2x^2+a^2z^2$. La différentielle elliptique qui figure au second membre est maintenant ramenée aux différentielles de première et de seconde espèce.

49. Avant de l'étudier de plus près, nous devons signaler une interprétation géométrique remarquable de la fonction désignée par S : cette fonction représente *l'aire du cône de sommet* (x, z) *circonscrit à l'ellipsoïde, l'aire étant prise entre le sommet et l'ellipse de contact.*

En effet, si l'on projette l'aire en question S et la conique de contact sur un plan normal à l'axe du cône, cône de révolution comme on sait, il vient, en gardant les notations employées plus haut,

$$S\sin\theta = \omega\sin\lambda,$$

d'où, en remplaçant ω, $\sin\theta$, $\sin\lambda$ par leurs valeurs, trouvées déjà,

$$S = \pi b\,\frac{EH^{\frac{1}{2}}}{A^{\frac{3}{2}}}\,\frac{b^2(a^2-c^2)xz}{H^{\frac{1}{2}}}\,\frac{1}{b(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}},$$

c'est-à-dire

$$S = \frac{\pi b^2(a^2-c^2)}{(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}(b^2-c^2)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{xz}{A^{\frac{1}{2}}} - a^2c^2\frac{xz}{A^{\frac{3}{2}}}\right],$$

ce qui coïncide bien avec la valeur de la fonction S écrite plus haut.

50. Revenons maintenant à la relation

$$dS - d\sigma = \pi\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,\frac{dx}{zA^{\frac{1}{2}}}[c^2x^2+a^2z^2-a^2c^2].$$

et transformons le second membre en introduisant les fonctions elliptiques sous la forme moderne.

Posons à cet effet

$$(5)\qquad \begin{cases} e_1 = 1 - \dfrac{3b^2c^2}{\rho}, \\ e_2 = 1 - \dfrac{3a^2c^2}{\rho}, \\ e_3 = 1 - \dfrac{3a^2b^2}{\rho}, \end{cases}$$

$$\rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

On a $e_1 > e_2 > e_3$ et $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Si l'on considère la fonction $\wp u$, définie par la relation habituelle

$$\wp'^2 u = 4(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3),$$

on peut poser

$$(6)\qquad \begin{cases} x^2 = \dfrac{\rho}{3b^2}\,\dfrac{a^2-b^2}{a^2-c^2}(\wp u - e_3), \\ z^2 = \dfrac{\rho}{3b^2}\,\dfrac{b^2-c^2}{a^2-c^2}(\wp u - e_1); \end{cases}$$

on a bien, en effet,

$$\frac{x^2}{a^2-b^2} - \frac{z^2}{b^2-c^2} = \frac{\rho}{3b^2}\,\frac{e_1-e_3}{a^2-c^2} = 1.$$

On en conclut

$$(7)\qquad A = c^2x^2 + a^2z^2 = \frac{\rho}{3}(\wp u - e_2),$$

et

$$(8)\qquad E = A - a^2c^2 = \frac{\rho}{3}(\wp u - 1).$$

Les équations (6) donnent les expressions, en fonction d'un paramètre u, des coordonnées d'un point de l'hyperbole focale; à chaque point (x, z) de l'hyperbole correspondent, puisque $\wp u$ est une fonction paire, deux valeurs de u égales et de signes contraires.

Si u varie de 0 à la demi-période réelle ω, $\wp u$ varie de $+\infty$ à e_1, et il résulte des formules (6) qu'on obtient ainsi tous les points réels de l'hyperbole. Pour les points de l'hyperbole extérieurs à l'ellipsoïde, on a $E > 0$, c'est-à-dire $\wp u > 1$: soit u_0 la plus petite racine positive de l'équation $\wp u_0 - 1 = 0$; on peut dire que, si le point (x, z) part d'un ombilic de l'ellipsoïde et s'éloigne à l'infini sur la branche de l'hyperbole focale qui passe par cet ombilic, l'argument correspondant positif u décroît de u_0 à 0 [1].

Supposons, pour fixer les idées, que le point (x, z) décrive ainsi la branche de l'hyperbole focale située dans l'angle positif zOx; on a

$$2x\,dx = \frac{\rho}{3b^2}\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\,\wp' u\,du.$$

D'après les hypothèses qu'on vient de faire, x et dx sont positifs, du est négatif : $\wp' u$ sera donc négatif et l'on devra écrire

$$\wp' u = -2\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)(\wp u - e_3)}.$$

Il vient ainsi, en résolvant l'équation précédente par rapport à dx, et remplaçant x par sa valeur en u,

$$dx = -\sqrt{\frac{\rho}{3}\,\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\,\frac{1}{b}\sqrt{(\wp u - e_1)(\wp u - e_2)}\,du,$$

et, par suite, en portant dans l'expression (4) de $dS - d\sigma$ les valeurs en u de x, z, A, E, dx, on aura

$$dS - d\sigma = -\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\wp u - 1)\,du,$$

c'est-à-dire, en intégrant,

$$S - \sigma = -\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\int(\wp u - 1)\,du.$$

---

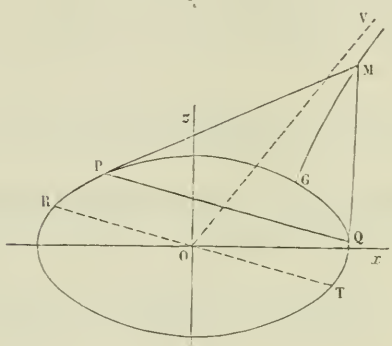
[1] Il est clair que l'équation $\wp u_0 - 1 = 0$ a des racines réelles, puisque e_1 est inférieur à 1.

Si l'on intègre entre u_0 et u, on aura, puisque S et σ sont évidemment nuls quand le point (x, z) est à l'ombilic,

$$(9) \qquad S - \sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u - \zeta u_0 - u_0).$$

Dans cette formule, σ est l'aire de la calotte ellipsoïdale PGQ; S l'aire latérale du cône PMQ (*fig.* 1).

Fig. 1.



Si le point M, (x, z) s'éloigne à l'infini sur la branche d'hyperbole focale GM, son plan polaire, PQ, tend vers la position RT, le plan RT étant le plan diamétral conjugué de l'asymptote OV : S devient alors infini, ainsi que ζu, puisque u tend vers zéro, et les deux membres de la relation (9) sont infinis. Pour étudier la question de plus près, écrivons la valeur de S en fonction de u. On a trouvé

$$S = \pi b^2 \frac{a^2 - c^2}{(b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}} xz \frac{E}{A^{\frac{3}{2}}};$$

d'où

$$(10) \qquad S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(pu - 1)\frac{(pu - e_1)^{\frac{1}{2}}(pu - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(pu - e_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Lorsque u tend vers zéro, on a, en remplaçant pu par $\frac{1}{u^2} + ku^2 + \ldots$,

$$S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + ku + \ldots\right).$$

L'aire σ tend vers l'aire de la calotte RGT, c'est-à-dire vers la moitié, Σ_0, de l'aire totale de l'ellipsoïde; enfin ζu est de la forme $\frac{1}{u} + k'u^3 + \ldots$. Portant ces valeurs dans (9), il vient

$$\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + ku + \ldots\right) - \Sigma_0 = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(\frac{1}{u} + u + k'u^3 + \ldots - \zeta u_0 - u_0\right).$$

Les termes infinis disparaissent, et, à la limite, u tendant vers zéro, il reste

$$(11) \qquad \Sigma_0 = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0).$$

On a donc finalement, en remplaçant $\zeta u_0 + u_0$ par sa valeur en fonction de Σ_0, dans (9).

$$(12) \qquad S + \Sigma_0 - \sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u).$$

51. Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Soit un cône de révolution circonscrit à un ellipsoïde, d'axes $2a$, $2b$, $2c$: l'excès de l'aire latérale de ce cône, limité à son sommet et à l'ellipse de contact, sur l'aire de la calotte ellipsoïdale comprise à son intérieur, a pour expression

$$\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - \Sigma_0.$$

Σ_0 étant l'aire du demi-ellipsoïde, u le plus petit argument positif défini, en fonction des coordonnées x et z du sommet du cône, par les relations compatibles

$$x^2 = \frac{\rho}{3b^2}\,\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}(\wp u - e_3),$$

$$z^2 = \frac{\rho}{3b^2}\,\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}(\wp u - e_1).$$

et étant posé

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho},$$

$$e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho}, \qquad \rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2;$$

S *est d'ailleurs donné, en fonction de* u, *par la formule*

$$S = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\wp u - 1)\frac{(\wp u - e_1)^{\frac{1}{2}}(\wp u - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(\wp u - e_2)^{\frac{3}{2}}}.$$

On voit que S est algébrique par rapport à $\wp u$, c'est-à-dire par rapport aux coordonnées du sommet du cône.

32. De cette formule on déduit immédiatement l'aire de la zone comprise entre les plans polaires de deux points de l'hyperbole focale, lorsque ces deux points sont sur une même branche de l'hyperbole et dans le même angle des axes Ox et Oz; on a, en désignant par u_1 et u_2 les arguments positifs correspondant à ces points, par S_1 et S_2 les aires des deux cônes circonscrits, et par Σ l'aire de la zone cherchée.

$$S_1 - S_2 + \Sigma = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_1 - \zeta u_2 + u_1 - u_2).$$

Mais cette formule, à cause des hypothèses faites sur u, ne convient plus au cas de deux points non situés dans le même angle des axes.

Pour l'étendre à tous les cas, nous définirons l'argument de telle sorte qu'il varie d'une manière continue tout le long de l'hyperbole focale : remarquant à cet effet que $(\wp u - e_1)^{\frac{1}{2}}$ et $(\wp u - e_3)^{\frac{1}{2}}$ sont égaux à $\frac{\sigma_1}{\sigma}(u)$ et $\frac{\sigma_3}{\sigma}(u)$, nous poserons, (x, z) désignant toujours un point de l'hyperbole,

$$x = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\rho}{3}\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}\frac{\sigma_3 v}{\sigma v}; \qquad z = \frac{1}{b}\sqrt{\frac{\rho}{3}\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}\frac{\sigma_1 v}{\sigma v},$$

v étant un nouvel argument égal à $\pm u$, et les deux radicaux étant

pris positivement. Si 2ω et $2\omega'$ désignent, comme d'habitude, les périodes réelle et imaginaire de pu, les périodes communes aux fonctions $\frac{\sigma_3}{\sigma}$ et $\frac{\sigma_1}{\sigma}$ seront 4ω et $4\omega'$, et à un point (x, z) de l'hyperbole focale correspondent, dans un parallélogramme 4ω, $4\omega'$, deux arguments de la forme v et $-v+2\omega+2\omega'$, dont le premier seul est réel : c'est cet argument réel bien défini que nous ferons correspondre à un point de l'hyperbole ; nous le supposerons compris, ce qui est permis, entre -3ω et ω.

Cela fait, en posant

$$s = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,\frac{\sigma v\,\sigma_1 v\,\sigma_3 v}{\sigma_2^3 v}\,(pv-1)$$

et

$$\theta(v) = s + \Sigma_0 - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta v + v),$$

on démontre aisément que la zone ellipsoïdale Σ comprise entre les plans polaires de deux points, d'arguments v_1, v_2, de l'hyperbole focale a pour expression

$$\Sigma = \theta(v_1) - \theta(v_2)$$

lorsque les deux points sont dans un même angle des axes ou dans deux angles opposés. Si les deux points sont dans des angles adjacents des axes, il faut ajouter à Σ ou en retrancher de Σ la constante

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\eta + \omega),$$

η étant la constante $\zeta\omega$.

Dans tous les cas, on peut dire, puisque s est algébrique par rapport aux coordonnées des deux points, que Σ est égale, à une quantité algébrique près, à la fonction $\zeta v_2 - \zeta v_1 + v_2 - v_1$, et, par suite, les zones qui correspondent à des valeurs de v_2 et v_1 telles que $(v_2 - v_1)$ reste constant sont égales entre elles, à une fonction algébrique près, car $\zeta v_2 - \zeta v_1$ est égal à $\zeta(v_2 - v_1)$ augmenté d'une quantité algébrique en pv_2 et pv_1.

On a ainsi une propriété analytique, analogue à celle des arcs de conique et dont il est aisé de trouver une interprétation géométrique.

33. Les plans polaires des points (x, z) de l'hyperbole focale, par rapport à l'ellipsoïde E, enveloppent un cylindre hyperbolique; si X, Z désignent les coordonnées du point où le plan polaire de (x, z) touche la trace de ce cylindre sur le plan xOz, on trouve aisément

$$X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\sigma_3 v}{\sigma v}, \qquad Z = -\frac{c^2}{\sqrt{b^2 - c^2}} \frac{\sigma_1 v}{\sigma v}.$$

Considérons maintenant l'hyperbole H_1, intersection du cylindre précédent par un plan mené par le grand axe, Ox, de E, et faisant avec le petit axe, Oz, un angle de cosinus égal à $\frac{c}{a}$: les cercles de ce plan se projettent sur le plan zOx selon des ellipses homothétiques à la section de E par zOx. Les coordonnées d'un point X_1, Z_1 de l'hyperbole H_1, rapportée à son centre et à ses axes, auront pour expressions

$$X_1 = X = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \frac{\sigma_3 v}{\sigma v}; \qquad Z_1 = \frac{a}{c} Z = -\frac{ac}{\sqrt{b^2 - c^2}} \frac{\sigma_1 v}{\sigma v}.$$

L'arc s de l'hyperbole H_1 a une expression remarquable: on a en effet

$$\frac{ds^2}{dv^2} = \frac{a^2 b^2 (a^2 - c^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} \left[\frac{\sigma_2 v}{\sigma v}\right]^2 = \frac{a^2 b^2 (a^2 - c^2)}{(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)} (\wp v - e_2)^2.$$

d'où

$$s = M(\zeta v + e_2 v) + N,$$

M et N étant des constantes.

On voit ainsi que, si $v_2 - v_1$ reste constant, les arcs correspondants de l'hyperbole H_1 seront égaux entre eux, à une fonction algébrique près; en d'autres termes, deux zones ellipsoïdales auront une différence algébrique si les arcs correspondants de H_1 jouissent de la même propriété.

Or on sait que, si d'un point d'une hyperbole homofocale à H_1 on mène à cette dernière courbe deux tangentes, les arguments v_2 et v_1 des points de contact ont une différence constante : c'est l'expression analytique du théorème de Graves et Chasles. On peut dire aussi, d'après une propriété connue des coniques, que deux arcs de l'hyper-

bole H_1 ont une somme algébrique rectifiable lorsque les tangentes à leurs quatre extrémités touchent un même cercle; ces tangentes étant les traces sur le plan de H_1 des quatre plans qui limitent les deux zones correspondantes, il en résulte immédiatement la proposition suivante :

54. *Appelons* zone ellipsoïdale *la zone comprise sur l'ellipsoïde entre deux ellipses le long de chacune desquelles on peut circonscrire à cette surface un cône de révolution;*

Les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui limitent ces zones touchent un cercle situé dans un plan passant par le grand axe et faisant avec le petit axe un angle de cosinus égal à $\frac{c}{a}$.

Ou, si l'on veut, en vertu de la remarque faite sur la projection d'un tel cercle :

Les aires de deux zones ellipsoïdales ont une somme ou une différence exprimable algébriquement lorsque les quatre plans qui les limitent touchent un ellipsoïde homothétique à l'ellipsoïde primitif.

Zones de Lebesgue et de Jellett.

55. Les zones à bases planes qu'on vient d'étudier sont les aires ellipsoïdales les plus simples qu'on ait pu ramener jusqu'ici aux intégrales elliptiques; un autre exemple a été donné il y a longtemps par Jellett [1] et par Lebesgue [2].

Le lieu des points d'un ellipsoïde où la normale fait avec l'un des axes principaux de la surface un angle donné se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre, et c'est l'aire comprise sur l'ellipsoïde à l'intérieur d'une de ces boucles que Jellett et Lebesgue ont calculée.

---

(1) *Cambridge and Dublin mathematical Journal*, t. I, p. 57.

(2) *Journal de Mathématiques*, 1re série, t. XI, p. 331.

La méthode de Lebesgue est bien connue: si l'on désigne par Ω l'aire comprise à l'intérieur d'une des boucles correspondant à la valeurs φ de l'angle (l'axe choisi étant, par exemple, l'axe Oz), par ω la projection de cette aire sur le plan xOy, on aura

$$\Omega = \int_0^{\varphi} \frac{d\omega}{\cos\varphi} = \left(\frac{\omega}{\cos\varphi}\right)_0^{\varphi} - \int_0^{\varphi} \omega\, d\left(\frac{1}{\cos\varphi}\right).$$

On obtient aisément ω, qui est l'aire de l'ellipse suivant laquelle la boucle considérée se projette sur le plan xOy :

$$\omega = \pi \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\, ab \frac{1}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}};$$

d'où

$$\Omega = \left[\frac{\pi abc \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\left(\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}\right]_0^{\varphi}$$

$$- \pi abc \int_0^{\varphi} \frac{\frac{\operatorname{tang}^3\varphi}{c^3}\, d\frac{\operatorname{tang}\varphi}{c}}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{b^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{c^2} + \frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

L'intégrale du second membre se ramène aux intégrales elliptiques en prenant $\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2}$ pour variable, et l'on a ainsi l'expression annoncée de Ω.

Lebesgue déduit immédiatement de cette formule que trois zones, correspondant à des angles φ, φ', φ'' faits respectivement par les normales avec Oz, Oy et Ox, auront leurs différences deux à deux planifiables si l'on a $\frac{\operatorname{tang}\varphi}{c} = \frac{\operatorname{tang}\varphi'}{b} = \frac{\operatorname{tang}\varphi''}{a}$: l'intégrale elliptique qui figure dans l'expression de Ω est en effet la même pour les trois zones. C'est le premier, et jusqu'ici le seul exemple connu d'aires ellipsoïdales à différence algébrique; nous en avons fait connaître un second dans les paragraphes précédents.

56. Avant d'en donner un troisième, beaucoup plus général et plus important, nous écrirons la formule de Lebesgue en introduisant les fonctions elliptiques. Il suffit de poser, en gardant les notations des paragraphes précédents,

$$\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}(\wp u - 1),$$

pour trouver

$$\Omega = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\frac{(\wp u - 1)(\wp u - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(\wp u - e_1)^{\frac{1}{2}}(\wp u - e_2)^{\frac{1}{2}}}\right]_{u_0}^{u} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\zeta u + u\right]_{u_0}^{u}.$$

Les fonctions elliptiques sont les mêmes que celles envisagées plus haut et de plus la partie transcendante de Ω est identique à celle qui figure dans l'expression de la zone ellipsoïdale.

Dans cette formule, u_0 est toujours la plus petite racine positive de l'équation $\wp u - 1 = 0$, qui correspond à $\varphi = 0$.

En observant que $\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0)$ est la demi-aire Σ_0 de l'ellipsoïde, (11), il vient

$$\Omega = \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\frac{(\wp u - 1)(\wp u - e_3)^{\frac{1}{2}}}{(\wp u - e_1)^{\frac{1}{2}}(\wp u - e_2)^{\frac{1}{2}}} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) + \Sigma_0,$$

expression tout à fait analogue à celle de la calotte à base plane. On peut dire aussi qu'à toute zone de Lebesgue est associée une calotte à base plane telle que la différence des deux aires soit planifiable, le plan de base de la calotte étant défini algébriquement en fonction des lignes trigonométriques de l'angle correspondant à la zone.

Nous n'insisterons pas davantage sur les courbes de Lebesgue, que nous allons retrouver comme cas particulier de courbes plus générales.

Aire d'un parallèle.

57. Appelons sur l'ellipsoïde, *parallèle*, d'axe D et d'angle φ, le lieu des points de la surface où la normale fait un angle φ avec une

droite D issue du centre [1] : un parallèle se compose de deux boucles fermées, symétriques par rapport au centre; l'aire comprise sur l'ellipsoïde entre ces deux boucles sera l'*aire du parallèle*.

Les parallèles dont l'axe est un des axes de l'ellipsoïde sont précisément les courbes de Lebesgue.

C'est pour évaluer l'*aire d'un parallèle* que nous allons faire appel aux formules de la première Partie de ce Mémoire.

Soient

$$(1) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde; l, m, n les paramètres directeurs de l'axe d'un parallèle; φ l'angle correspondant : la seconde équation du parallèle sera

$$\cos^2\varphi(A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2) = \frac{1}{l^2+m^2+n^2}(Alx + Bmy + Cnz)^2.$$

Nous l'écrirons

$$(2) \qquad A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 = 0,$$

en posant, pour simplifier l'écriture,

$$(3) \quad Al = \alpha, \qquad Bm = \beta, \qquad Cn = \gamma, \qquad u^2 = \frac{1}{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}.$$

Supposons l, m, n, c'est-à-dire α, β, γ fixes, et $\cos\varphi$, ou u, variable; les parallèles envisagés auront le même axe, et soient deux de ces parallèles, correspondant aux valeurs u et $u + du$.

En coupant ces courbes par deux plans infiniment voisins,

$$(4) \qquad P + (c + dc)Q = 0, \qquad P + cQ = 0,$$

passant par une droite fixe, $P = 0$, $Q = 0$, menée par le centre de l'ellipsoïde, on détermine sur cette surface, entre les plans et les parallèles, quatre aires infiniment petites dont la somme s'évalue aisément.

---

[1] Cette définition est due à Lebesgue, *loc. cit.*

L'élément d'aire sur l'ellipsoïde a pour expression

$$d\sigma = dx\,dy\,\frac{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}{Cz}$$

ou, en prenant u et v pour variables (n° **30**),

$$d\sigma = du\,dv\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}\,\frac{4u(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2Q}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des premiers membres des équations (1), (2), (4). En chaque point des quatre aires infiniment petites considérées, on peut remplacer $\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}$ par $u(\alpha x+\beta y+\gamma z)$; d'après l'équation (2), il vient alors

$$d\sigma = du\,dv\,\frac{4u^2(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3Q}{\Delta}.$$

Pour avoir la somme des quatre aires, on devra sommer l'expression $4u^2\frac{Q}{\Delta}(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3$ pour les quatre points communs aux surfaces (1), (2), (4); si de plus on suppose que la droite $P=0$, $Q=0$ rencontre l'ellipsoïde à l'intérieur des boucles fermées qui correspondent aux parallèles u_1 et u [1], on obtiendra l'aire comprise entre ces deux parallèles en intégrant la somme précédente entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ pour v; u_1 et u pour u. On a donc, en désignant l'aire comprise entre les deux parallèles par σ,

$$(5)\qquad \sigma = \int_{u_1}^{u} 4u^2\,du\int_{-\infty}^{+\infty} dv\sum\frac{Q(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}{\Delta}.$$

La somme qui figure au second membre s'évalue à l'aide de la formule (8) du n° **20**; on a ici $k=3$, et il vient

$$(6)\qquad \sum\frac{Q(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}{\Delta} = \frac{1}{2}\sum\frac{d^2}{d\theta^2}\,\frac{Q(1,\eta,\zeta,\theta)[\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta]^3}{(P+\theta Q)[f'_\eta\varphi'_\zeta-f'_\zeta\varphi'_\eta]}.$$

---

[1] Cette condition, qu'on peut toujours supposer réalisée, est nécessaire pour que tous les éléments $d\sigma$ entrent positivement dans l'expression de σ : on le voit en appliquant la règle du n° 30, rectifiée par la note (2) de la première page de la deuxième Partie de ce Mémoire.

Pour appliquer cette formule, on a supposé

$$\psi = P + cQ,$$
$$f = Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 1,$$
$$\varphi = A^2x^2 + B^2y^2 + C^2z^2 - u^2(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2;$$

on se rappelle que η, ζ, θ désignent $\frac{y}{x}$, $\frac{z}{x}$, $\frac{t}{x}$, t étant la variable d'homogénéité: la somme du second membre s'étend maintenant aux points communs aux surfaces $f(1, \eta, \zeta, \theta) = 0$, $\varphi(1, \eta, \zeta, \theta) = 0$, $\theta = 0$; et l'on y doit faire finalement θ nul.

Les coordonnées de ces quatre points sont indépendantes de c, et, par suite, dans l'équation

$$(7) \qquad \sigma = 2\int_{u_1}^{u} u^2\,du \sum \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d^2}{d\theta^2}\,\frac{Q(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^3}{(P + cQ)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)}\,dc,$$

l'intégration par rapport à c pourra s'effectuer de suite. On peut écrire, si l'on veut, puisque u est indépendant de θ,

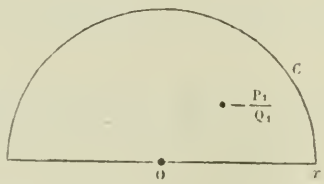
$$(8) \qquad \sigma = 2\sum \frac{d^2}{d\theta^2}\int_{u_1}^{u} u^2\,du \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^3}{(P + cQ)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)}\,dc,$$

et l'intégrale indéfinie par rapport à c est de la forme

$$\sum \mathfrak{R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dc}{P + cQ}.$$

Soient P_1 et Q_1 les valeurs des fonctions P et Q en l'un des quatre

Fig. 2.



points auxquels s'étend la somme; supposons que, dans le plan des quantités c, le point dont l'affixe est $-\frac{P_1}{Q_1}$ soit au-dessus de l'axe

des x; en intégrant la fonction $\frac{1}{P+vQ}$ le long du contour ci-contre, on aura

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} + \int_C \frac{dv}{P+vQ} = 2\pi i r,$$

r étant le résidu, $\frac{1}{Q_1}$, relatif au pôle $-\frac{P_1}{Q_1}$. Quant à l'intégrale $\int_C$, on voit aisément, en supposant que le rayon du cercle C augmente indéfiniment, qu'elle est égale à $\frac{\pi i}{Q_1}$; on a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} = +\frac{\pi i}{Q_1}.$$

Si le point d'affixe $-\frac{P_1}{Q_1}$ avait été au-dessous de Ox, on aurait trouvé

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dv}{P+vQ} = -\frac{\pi i}{Q_1}.$$

Il vient donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Q(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{(P+vQ)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)}\,dv = \pm\pi i\,\frac{(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta},$$

le signe à choisir étant celui du coefficient de i dans $-\frac{P_1}{Q_1}$; et, par suite,

$$(9) \qquad \sigma = 2\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{u_1}^{u} u^2\,du \sum \pm\pi i\,\frac{(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)^3}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta},$$

la somme étant toujours étendue aux quatre points communs aux surfaces $f=0$, $\varphi=0$, $\theta=0$. Il est à remarquer qu'on aura dans le second membre deux signes $+$ et deux signes $-$, car, les quatre points étant imaginaires conjugués deux à deux, les parties imaginaires des quatre valeurs de $-\frac{P}{Q}$ sont deux à deux égales et de signes contraires.

58. Pour calculer l'intégrale par rapport à u, faisons un change-

ment de variable en posant

$$U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta).$$

η et ζ sont des fonctions des variables u et θ définies par les relations

$$(10)\quad \begin{cases} f(\eta, \zeta) \quad = A + B\eta^2 + C\zeta^2 - \theta^2 = 0, \\ \varphi(\eta, \zeta, u) = A^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 - u^2(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 0, \end{cases}$$

θ est d'ailleurs une variable indépendante de u, qu'on doit faire finalement égale à zéro, après avoir effectué l'opération $\frac{d^2}{d\theta^2}$.

On tire de là, en supposant θ constant,

$$\begin{aligned} &f'_\eta\, d\eta + f'_\zeta\, d\zeta = 0, \\ &\varphi'_\eta\, d\eta + \varphi'_\zeta\, d\zeta = 2u\,du(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2, \\ &B^2\eta\, d\eta + C^2\zeta\, d\zeta = U\, dU; \end{aligned}$$

d'où, en éliminant $d\eta$ et $d\zeta$,

$$\frac{u\,du(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2}{f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta} = \frac{U\,dU}{4\eta\zeta BC(C - B)}.$$

Il vient ainsi

$$(11)\qquad \sigma = \sum \pm \frac{\pi i}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}\int \frac{U^2\,dU}{BC(C - B)\eta\zeta},$$

η et ζ étant des fonctions de U et θ définies par les relations

$$(12)\qquad \begin{cases} A + B\eta^2 + C\zeta^2 = \theta^2, \\ A^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = U^2, \end{cases}$$

et la somme s'étendant aux quatre valeurs de η, ζ définies par ces équations, dans l'hypothèse de $\theta = 0$. Il ne faut pas oublier que U n'est pas indépendant de θ: on a

$$(12\ bis)\qquad U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta),$$

u étant indépendant de θ.

Soient U_1 et U les valeurs de U correspondant à u_1 et u; on a

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{U_1}^{U}\frac{U^2\,dU}{\eta_1\zeta} = \int_{U_1}^{U} U^2\,dU\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta_1\zeta}\right) + \frac{d}{d\theta}\,\frac{U^2\,\dfrac{dU}{d\theta}}{\eta_1\zeta}.$$

Or on a, en différentiant par rapport à θ les relations (12) et (12 *bis*).

$$B\eta\,\frac{d\eta_1}{d\theta} + C\zeta\,\frac{d\zeta}{d\theta} = \theta = 0,$$

$$B^2\eta\,\frac{d\eta_1}{d\theta} + C^2\zeta\,\frac{d\zeta}{d\theta} = U\,\frac{dU}{d\theta},$$

$$\beta u\,\frac{d\eta_1}{d\theta} + \gamma u\,\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta}.$$

On en conclut

$$\frac{d\eta_1}{d\theta} = \frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta} = 0$$

et, par suite,

$$\frac{d}{d\theta}\,\frac{U^2\,\dfrac{dU}{d\theta}}{\eta_1\zeta} = \frac{U^2}{\eta_1\zeta}\,\frac{d^2U}{d\theta^2}.$$

$\dfrac{d^2U}{d\theta^2}$ se calcule aisément; en différentiant deux fois par rapport à θ les relations (12) et (12 *bis*), on trouve

$$(13)\qquad \begin{vmatrix} B\eta & C\zeta & 1 \\ B^2\eta_1 & C^2\zeta & U\,\dfrac{d^2U}{d\theta^2} \\ \beta u & \gamma u & \dfrac{d^2U}{d\theta^2} \end{vmatrix} = 0.$$

Il vient ainsi

$$BC(C-B)\sigma = \sum \pm \frac{\pi i}{2}\left[\int U^2\,dU\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta_1\zeta}\right) + \frac{U^2}{\eta_1\zeta}\,\frac{d^2U}{d\theta^2}\right]_{U_1}^{U}.$$

Or on a, en tirant η_1^2 et ζ^2 des relations (12),

$$(14)\qquad \begin{cases} \sqrt{B(C-B)}\,\eta = i\sqrt{U^2 - C\theta^2 + A(C-A)}, \\ \sqrt{C(C-B)}\,\zeta = \sqrt{U^2 - B\theta^2 + A(B-A)}. \end{cases}$$

Posons, pour abréger,

$$\mathfrak{B} = U^2 + A(B - A),$$
$$\mathfrak{C} = U^2 + A(C - A),$$

on trouve, en effectuant l'opération $\frac{d^2}{d\theta^2}$ et faisant $\theta = 0$ dans le résultat final,

$$\frac{i}{\sqrt{BC}(C - B)} \frac{d^2}{d\theta^2} \frac{1}{\eta\zeta} = \frac{1}{\mathfrak{B}^{\frac{3}{2}} \mathfrak{C}^{\frac{3}{2}}} (\mathfrak{B} C + \mathfrak{C} B).$$

Effectuons un nouveau changement de variable en posant

$$(14\ bis) \qquad U^2 - A^2 = A\lambda,$$

on a

$$\int \frac{U^2 dU (\mathfrak{B} C + \mathfrak{C} B)}{\mathfrak{B}^{\frac{3}{2}} \mathfrak{C}^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{\sqrt{A + \lambda}\,[\lambda(B + C) + 2BC]}{2\sqrt{A}(\lambda + B)^{\frac{3}{2}}(\lambda + C)^{\frac{3}{2}}} d\lambda$$
$$= \frac{\lambda\sqrt{A + \lambda}}{\sqrt{A}\sqrt{(\lambda + B)(\lambda + C)}} - \frac{1}{2\sqrt{A}} \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}}.$$

Il vient donc finalement

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \sigma = \sum \pm \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{ABC}} \left[\frac{\lambda\sqrt{A + \lambda}}{\sqrt{B + \lambda}\sqrt{C + \lambda}} - \frac{1}{2} \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(A + \lambda)(B + \lambda)(C + \lambda)}} \right] \\ + \sum \pm \frac{\pi i}{2} \frac{U^2}{\eta\zeta} \left(\frac{d^2 U}{d\theta^2} \right). \end{aligned} \right.$$

La somme s'étend aux quatre systèmes de valeurs η, ζ, U, λ, définis, en fonction de u, par les relations (12), (12 *bis*) et (14 *bis*), où θ est nul.

59. Employons maintenant les fonctions elliptiques. Soient

$$A = \frac{1}{a^2}, \qquad B = \frac{1}{b^2}, \qquad C = \frac{1}{c^2};$$

$$e_1 = 1 - \frac{3b^2c^2}{\rho}, \qquad e_2 = 1 - \frac{3a^2c^2}{\rho}, \qquad e_3 = 1 - \frac{3a^2b^2}{\rho};$$

$$\rho = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2.$$

On peut poser, en introduisant la variable définitive, v,

$$\lambda = -\frac{1}{a^2} + \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}\,\frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\wp v - e_1},$$

d'où, en calculant U par la relation $U^2 - A^2 = A\lambda$ et η, ζ par les équations (14),

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned}
\sqrt{A+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma v}{\sigma_1 v},\\
\sqrt{B+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma_1 v},\\
\sqrt{C+\lambda} &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{abc}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1 v},\\
U &= \frac{\sqrt{\frac{\rho}{3}}}{a^2bc}\sqrt{e_1-e_2}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma v}{\sigma_1 v},\\
\eta &= \frac{ib}{a^2\sqrt{b^2-c^2}}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\sigma_2 v}{\sigma_1 v},\\
\zeta &= \frac{c}{a^2\sqrt{b^2-c^2}}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sqrt{e_1-e_2}\,\frac{\sigma_3 v}{\sigma_1 v}.
\end{aligned}\right.$$

Posons également, pour la symétrie des notations ultérieures, l, m, n, désignant toujours les paramètres de l'axe du parallèle,

$$(16\ bis)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{l}{a\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_1\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}},\\
\frac{m}{b\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_2\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(e_2-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_2-e_3)^{\frac{1}{2}},\\
\frac{n}{c\sqrt{l^2+m^2+n^2}} &= l_3\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(e_3-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_3-e_2)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}\right.$$

Les valeurs de η et ζ en fonction de v sont dépourvues d'ambiguïté; quant aux fonctions $\frac{\sigma_\alpha v}{\sigma v}$ et $\wp v$ elles sont fonctions algébriques de η, ζ,

u et par suite d'après (12) et (12 *bis*) des paramètres du parallèle. Observons maintenant qu'aux quatre couples de valeurs η, ζ qui figurent dans l'expression (15) de σ, et qui vérifient l'équation

$$U = u(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta),$$

correspondent, en vertu de (16), quatre valeurs de v, vérifiant l'équation

$$\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,\frac{1}{abcu}\,\sigma v = \frac{\alpha a}{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}}\,\sigma_1 v,$$
$$+\frac{\beta b}{(e_2-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_2-e_3)^{\frac{1}{2}}}\,\sigma_2 v + \frac{\gamma c}{(e_3-e_1)^{\frac{1}{2}}(e_3-e_2)^{\frac{1}{2}}}\,\sigma_3 v)$$

qui, en remplaçant α, β, γ, u par leurs valeurs (3) en l, m, n, $\cos\varphi$, et tenant compte de (16 *bis*), devient

$$(17)\qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\,\sigma v = l_1\sigma_2 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v.$$

Observons que l_1 et l_3 sont réels et que l_2 est purement imaginaire, d'après (16 *bis*).

Portant les valeurs de λ, U, η, ζ dans (15), il vient

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \sigma = {} & \sum \pm \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[e_1 - 1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv-e_1}\right]\frac{\sigma_1 v\,\sigma v}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v} \\ & + \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\int\left[e_1 - 1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{pv-e_1}\right]dv \\ & + \sum \pm \frac{\pi}{2}\,bc\,\frac{(e_1-e_2)^{\frac{1}{2}}(e_1-e_3)^{\frac{1}{2}}}{\sigma_2 v\,\sigma_3 v}\,\sigma^2 v\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right). \end{aligned}\right.$$

60. Nous ne calculerons pas en ce moment $\frac{d^2U}{d\theta^2}$, qui, d'après (13), est algébrique par rapport à η, ζ et u, c'est-à-dire par rapport aux paramètres du parallèle; la dernière partie de σ est par suite une fonction algébrique de ces paramètres, quels que soient les signes à choisir; il en est de même de la première partie, et par conséquent l'aire σ s'exprime, à une fonction algébrique près par rapport aux élé-

ments des deux parallèles qui la limitent, par l'expression

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\int\left[e_1 - 1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\mathrm{p}v - e_1}\right]dv;$$

or on a

$$\mathrm{p}(v+\omega) = e_1 + \frac{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}{\mathrm{p}v - e_1},$$

d'où

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[-\zeta(v+\omega) - v\right].$$

La somme s'étend aux quatre racines, distinctes à des multiples près de 4ω, $4\omega'$, de l'équation (17).

On peut écrire

$$(19)\qquad \sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(-\zeta v - \zeta\omega - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}v - e_1} - v\right)$$

ou, en intégrant,

$$\sigma''_1 = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left(-\zeta\omega - \frac{1}{2}\frac{\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}v - e_1}\right) + \sigma'',$$

étant posé

$$(20)\qquad \sigma'' = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}(-\zeta v - v).$$

Le premier terme de σ''_1 est encore algébrique, et la transcendante qui figure dans σ se réduit simplement à σ''.

Pour calculer l'aire d'un parallèle (n° **57**) correspondant à une valeur φ de l'angle, il faut faire varier φ de φ à $+\frac{\pi}{2}$, et, par suite, u de u à $+\infty$; l'aire de l'ellipsoïde s'obtiendra en faisant varier φ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons ainsi ramené σ à une fonction algébrique et à la somme de quatre expressions de la forme $\zeta v + v$; nous pouvons aller plus loin et donner, avant de développer l'expression trouvée, une interprétation géométrique de ces formules.

Interprétation géométrique de la formule de l'aire d'un parallèle.

60. Soit Π un parallèle d'axe $D(l, m, n)$ et d'angle φ, sur l'ellipsoïde (E); considérons la développable circonscrite à (E) le long du parallèle. Les plans tangents de cette développable sont parallèles aux plans tangents du cône de révolution dont l'axe est la droite D, et le demi-angle au sommet l'angle $\frac{\pi}{2} - \varphi$; on peut donc dire que la développable est circonscrite à E et à la sphère de rayon infini inscrite au cône; cette sphère a pour centre le point kl, km, kn et pour rayon kr, k étant un paramètre très grand et r étant défini par la relation

$$r^2 = (l^2 + m^2 + n^2)\cos^2\varphi.$$

Or on sait que la développable circonscrite à une quadrique (E) et à une sphère a ses quatre coniques doubles sur quatre quadriques homofocales à (E) (Chasles); nous avons montré, dans un autre travail [1], que (E) étant la surface

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

et la sphère ayant pour équation

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - R^2 = 0,$$

on obtiendra les quatre quadriques homofocales par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2 + \theta} + \frac{y^2}{b^2 + \theta} + \frac{z^2}{c^2 + \theta} - 1 = 0.$$

où θ est une des quatre racines de l'équation

$$\frac{x_0^2}{a^2 + \theta} + \frac{y_0^2}{b^2 + \theta} + \frac{z_0^2}{c^2 + \theta} - 1 = \frac{R^2}{\theta}.$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 99.

Dans le cas actuel, en remplaçant x_0, y_0, z_0, R par kl, km, kn, kr et faisant k^2 infini, on voit que l'équation en θ se réduit au troisième degré; ce fait pouvait se prévoir, car une des lignes doubles de la développable est à l'infini, les trois autres sont sur les quadriques

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0,$$

où θ est une des trois racines de l'équation

$$(21)\qquad \frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}=\frac{l^2+m^2+n^2}{\theta}\cos^2\varphi.$$

Une et une seule de ces racines est positive, comme on le voit en substituant $-a^2$, $-b^2$, $-c^2$ et 0; les deux autres sont réelles et négatives, comprises respectivement entre $-a^2$ et $-b^2$, $-b^2$ et $-c^2$; en d'autres termes, les trois coniques doubles sont situées respectivement sur un hyperboloïde à deux nappes, sur un hyperboloïde à une nappe, et sur un ellipsoïde E_1, ce dernier étant homofocal et extérieur à l'ellipsoïde (E). Les plans des trois courbes passent d'ailleurs par le centre de E, et sont respectivement conjugués, par rapport à la quadrique homofocale correspondante, de la direction l, m, n (Chasles).

61. Inversement, si sur un ellipsoïde E_1

$$\frac{x^2}{a^2+\theta}+\frac{y^2}{b^2+\theta}+\frac{z^2}{c^2+\theta}-1=0,\qquad \theta>0,$$

homofocal et extérieur à E, on prend une conique centrale quelconque, les plans tangents à cette conique et à E touchent E suivant un parallèle, d'axe l, m, n et d'angle φ; l, m, n est la direction conjuguée du plan de la conique dans l'ellipsoïde E_1, et φ est lié aux paramètres l, m, n par la relation (21).

62. On a cette propriété importante que, *pour tous les parallèles ainsi déterminés, l'ellipsoïde* E_1 *restant fixe, les racines de l'équation* (17) *en* v *ont deux à deux une somme constante, et inversement.*

Soit, en effet, une équation de la forme

$$(22)\qquad l_0 . \sigma v + l_1 . \sigma_1 v + l_2 . \sigma_2 v + l_3 . \sigma_3 v = 0,$$

où les l sont des constantes; cherchons la condition pour que deux des zéros, v_1 et v_2, aient une somme donnée h. On aura alors, v_3 et v_4 étant les deux autres zéros,

$$v_1 + v_2 = h, \qquad v_3 + v_4 = -h,$$

à des multiples près des périodes 4ω, $4\omega'$.

Si l'on considère la courbe définie par les équations

$$\frac{x}{\sigma v} = \frac{x_1}{\sigma_1 v} = \frac{x_2}{\sigma_2 v} = \frac{x_3}{\sigma_3 v},$$

c'est une courbe gauche du quatrième ordre, de genre un, et il est connu que la relation $v_1 + v_2 = h$ exprime que la corde dont les extrémités ont pour arguments v_1 et v_2 décrit une quadrique fixe passant par la courbe. En d'autres termes, le plan $l_0 x + l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_3 x_3 = 0$ est tangent à une telle quadrique fixe, et réciproquement.

Or des relations

$$\wp v - e_\alpha = \frac{\sigma_\alpha^2 v}{\sigma^2 v}$$

on tire

$$\sigma_1^2 v + e_1 \sigma^2 v = \sigma_2^2 v + e_2 \sigma^2 v = \sigma_3^2 v + e_3 \sigma^2 v,$$

et l'équation de toute quadrique passant par la courbe sera

$$\mu_1 (x_1^2 + e_1 x^2) + \mu_2 (x_2^2 + e_2 x^2) + \mu_3 (x_3^2 + e_3 x^2) = 0,$$

avec

$$(23)\qquad \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 0.$$

Le plan $l_0 x + \ldots = 0$ sera tangent à cette quadrique si l'on a

$$(24)\qquad \frac{l_1^2}{\mu_1} + \frac{l_2^2}{\mu_2} + \frac{l_3^2}{\mu_3} + \frac{l_0^2}{e_1 \mu_1 + e_2 \mu_2 + e_3 \mu_3} = 0.$$

La condition pour que deux racines de (17) aient une somme constante est donc, en tenant compte de (23), et en introduisant l, m, n, à la place de l_1, l_2, l_3,

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{l^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{1}{\mu_2}\frac{m^2}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}$$
$$+\frac{1}{\mu_3}\frac{n^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{b^2c^2\mu_1+a^2c^2\mu_2+a^2b^2\mu_3},$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois quantités de somme nulle, et le rapport de deux d'entre elles étant d'ailleurs fonction de la valeur de la somme constante.

Pour démontrer la proposition énoncée, il suffit de prouver qu'on peut toujours trouver une quantité θ, telle que cette relation soit identique à l'équation (21) qui lie l, m, n, φ dans le cas où l'ellipsoïde E_1 est fixe.

On montre aisément qu'il en est ainsi, la quantité θ étant définie par l'équation

$$(25)\qquad \theta=a^2b^2c^2\frac{\dfrac{\mu_1}{a^2}+\dfrac{\mu_2}{b^2}+\dfrac{\mu_3}{c^2}}{a^2\mu_1+b^2\mu_2+c^2\mu_3}.$$

63. Il résulte de là que, si les racines de l'équation (17) en v ont deux à deux une somme constante, la développable circonscrite à E le long du parallèle correspondant a une de ses lignes doubles sur une quadrique fixe, homofocale à E; pour que cette quadrique soit un ellipsoïde E_1, extérieur à E, il faut encore que la quantité θ soit positive.

Or il est aisé d'exprimer θ en fonction de la somme h, de deux racines v_1 et v_2.

D'après ce qui précède, l'équation

$$l_0.\sigma v+l_1.\sigma_1 v+l_2.\sigma_2 v+l_3.\sigma_3 v=0$$

a deux racines de somme constante, h, si les l sont liés par la relation

$$(24)\qquad \frac{l_1^2}{\mu_1}+\frac{l_2^2}{\mu_2}+\frac{l_3^2}{\mu_3}+\frac{l_0^2}{e_1\mu_1+e_2\mu_2+e_3\mu_3}=0.$$

μ_1, μ_2, μ_3 étant trois quantités de somme nulle, dont les rapports sont fonctions de h : pour les calculer il suffit de considérer un cas particulier, et de supposer, par exemple, que l'équation en v a pour racines 0 et h.

On a ainsi

$$l_1 + l_2 + l_3 = 0,$$
$$l_0 . \sigma h + l_1 . \sigma_1 h + l_2 . \sigma_2 h + l_3 . \sigma_3 h = 0,$$

d'où l'on tire l_2 et l_3 en fonction de l_0 et l_1 ; portant ces valeurs dans (24) et écrivant que l'équation obtenue est satisfaite, quels que soient l_0 et l_1, on trouve

$$\frac{1}{\mu_1} = (\sigma_1 h - \sigma_2 h)(\sigma_1 h - \sigma_3 h),$$
$$\frac{1}{\mu_2} = (\sigma_2 h - \sigma_1 h)(\sigma_2 h - \sigma_3 h),$$
$$\frac{1}{\mu_3} = (\sigma_3 h - \sigma_2 h)(\sigma_3 h - \sigma_1 h),$$

et la valeur (25) de θ devient

$$-\frac{1}{\theta} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}\left[1 - \frac{e_1(e_2-e_3)\sigma_1 h + e_2(e_3-e_1)\sigma_2 h + e_3(e_1-e_2)\sigma_3 h}{(e_2-e_3)\sigma_1 h + (e_3-e_1)\sigma_2 h + (e_1-e_2)\sigma_3 h}\right].$$

On démontre aisément que, h étant réel, la quantité entre crochets dans le second membre est égale à

$$\left(1 - \wp\frac{h}{2}\right)$$

et, par suite, on a

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp\frac{h}{2} - 1. \tag{26}$$

Pour que θ soit positif, il faut et il suffit que $\wp\frac{h}{2}$ soit supérieur à 1 ; soit u_0 la plus petite racine positive de $\wp u - 1 = 0$, la quantité $\frac{h}{2}$ devra être comprise entre 0 et u_0, à des multiples près des périodes, et h entre 0 et $2u_0$: on peut toujours, en effet, supposer $h > 0$, puisque, si deux racines de l'équation en v ont une somme h, les deux autres ont la somme $-h$.

64. Cela posé, reprenons l'expression (20) de σ'' :

$$\sigma'' = \sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}(-\zeta v - v),$$

la somme s'étendant à quatre racines distinctes, aux périodes 4ω, $4\omega'$ près, de l'équation (17) en v,

$$(17) \qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\sigma v = l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v.$$

Il s'agit maintenant de savoir quel signe on doit faire correspondre à chacune des quatre racines de cette équation dans l'expression de σ''.

Supposons satisfaite la condition qui exprime que deux de ces racines ont h pour somme, et désignons ces racines par v_1, $h - v_1$, v_2, $-h - v_2$, h étant une quantité positive comprise entre 0 et $2u_0$.

Si, dans les fonctions $\frac{\sigma_1}{\sigma}v$, $\frac{\sigma_2}{\sigma}v$, $\frac{\sigma_3}{\sigma}v$, l'on remplace v par $2\omega + 2\omega' - v$, la première et la troisième ne changent pas, la seconde change de signe : on en conclut aisément, en se rappelant que le coefficient l_2 est purement imaginaire, que, si l'équation (17), en v, admet la racine $p + qi$, elle admet la racine $2\omega + 2\omega' - p + qi$, et, par suite, h étant une quantité réelle, les quatre racines de cette équation seront de la forme

$$p + qi, \quad h - p - qi,$$
$$2\omega + 2\omega' - p + qi, \quad -h - 2\omega - 2\omega' + p - qi.$$

On vérifie sans difficulté que la première et la troisième racines, substituées dans les valeurs (16) de η et ζ donnent des résultats imaginaires conjugués; de même la deuxième et la quatrième; par suite, d'après une remarque faite à la fin du n° 57, les signes qui, dans l'expression de σ'', correspondent à chacune de ces racines seront (ε, ε' désignant ± 1), respectivement,

$$\varepsilon, \quad \varepsilon', \quad -\varepsilon, \quad -\varepsilon.$$

Cherchons d'abord les signes relatifs de ε et ε' ; il n'y a à faire que

deux hypothèses $\varepsilon = \varepsilon'$ et $\varepsilon = -\varepsilon'$. Si $\varepsilon = \varepsilon'$, il vient

$$\sigma'' = \varepsilon \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 + \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-h - v_2) + 2h],$$

c'est-à-dire,

$$\sigma'' = \varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta h + h) + \mathrm{R},$$

R étant algébrique en $\wp v_1$ et $\wp v_2$.

Si $\varepsilon = -\varepsilon'$, on a

$$\sigma'' = \varepsilon \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 - \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 + \zeta(-h - v_2) + 2(v_1 - v_2 - h)],$$

ou

$$\sigma'' = \varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta(v_1 - v_2 - h) + v_1 - v_2 - h] + \mathrm{R}'.$$

Or, pour avoir l'aire de l'ellipsoïde, il faut, l, m, n étant donnés, faire varier φ de o à $\frac{\pi}{2}$; aux variables $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, φ ou $\frac{l_2}{l_1}$, $\frac{l_3}{l_1}$, φ, on peut substituer les variables v_1, v_2, h, puisque l'équation (17) écrite deux fois en y remplaçant v par v_1 et v_2, et l'équation (21) déterminent $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, $\cos\varphi$ en fonction de v_1, v_2, θ et que (26) définit θ en fonction de h. Or, φ variant de o à $\frac{\pi}{2}$, l'équation (21) montre que θ varie de ∞ à o, et, par suite, d'après (26), h varie de $2u_0$ à o; il résulte de là que l'aire de l'ellipsoïde sera, dans l'hypothèse de $\varepsilon = \varepsilon'$, exprimée, à une fonction algébrique près, par la fonction *transcendante*

$$2\varepsilon\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u_0 + u_0),$$

qui est indépendante des valeurs de l, m, n, et dans l'hypothèse de $\varepsilon = -\varepsilon'$, par une fonction *transcendante* qui dépend de $v_1 - v_2$, c'est-à-dire, comme on le reconnaît aisément, qui dépend effectivement des valeurs de $\frac{l}{n}$, $\frac{m}{n}$, résultat absurde, puisque l'on doit aboutir à la

même expression pour l'aire de l'ellipsoïde, quel que soit l'axe des parallèles considérés [1].

Observons de plus que dans l'expression trouvée, pour le cas de $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, on reconnaît celle qui a été obtenue par une autre voie pour l'aire de la surface (n° **50**).

On a donc nécessairement $\varepsilon = \varepsilon' = 1$, et

$$\sigma'' = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}(2\zeta h + 2h) + \mathrm{R},$$

ce qu'on peut écrire, à une fonction algébrique près,

$$\sigma'' = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta w + w),$$

w, c'est-à-dire $2h$, étant défini par la relation (26)

$$(27) \qquad \frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp w - 1,$$

et θ étant la racine positive de l'équation

$$(21) \qquad \frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{\theta}.$$

65. On a donc cette proposition :

L'aire d'un parallèle d'axe (l, m, n) *et d'angle* φ, *est égale, à une fonction algébrique près, à l'expression*

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta w + w),$$

où w *est la plus petite quantité positive définie par les relations* (27) *et* (21).

---

[1] C'est ici qu'intervient expressément la condition que la quadrique considérée doit être un ellipsoïde; pour un hyperboloïde, le groupement des signes serait différent.

Géométriquement, d'après ce qui précède, on peut dire, puisque ϖ dépend seulement de la racine positive θ de (27), que :

Si sur un ellipsoïde, E_1, *homofocal et extérieur à un ellipsoïde* E, *on prend une conique centrale quelconque, et si l'on circonscrit à cette conique et à* E *une développable, l'aire comprise sur* E *entre les deux boucles de la courbe de contact demeure constante, à une fonction algébrique près, quand la conique centrale varie sur* E_1.

Généralisation du théorème de Graves et Chasles.

66. Pour compléter ces résultats, il nous reste à donner l'expression de cette fonction algébrique et son interprétation géométrique.

Introduisons à cet effet l'aire des deux nappes de la développable précédente, limitées à la conique centrale sur E_1, et à la courbe de contact sur E; nous allons faire voir que la fonction algébrique cherchée est précisément égale à cette aire.

Nous démontrerons auparavant une proposition auxiliaire intéressante par elle-même.

Soient C_1 la conique choisie sur E_1; l, m, n la direction conjuguée de son plan dans E_1; la courbe de contact sur E est un parallèle d'axe l, m, n, d'après ce qui a été dit (n° **60**); soit φ son angle.

Considérons une génératrice de la développable circonscrite à C_1 et à E, et suivons cette génératrice à partir de C_1, en nous dirigeant vers son point de contact avec E; ce point dépassé, on rencontre une conique double C_2 de la développable que nous appellerons la *deuxième conique double,* C_1 étant la première. Si nous limitons la développable aux coniques C_1 et C_2, on a cette proposition que :

L'aire de la développable circonscrite à E, *limitée aux coniques* C_1 *et* C_2, *est constante, quelle que soit sur l'ellipsoïde* E_1, *la conique centrale* C_1.

En effet, l'aire à évaluer est divisée en deux nappes par C_1; projetons l'aire d'une des deux nappes sur un plan normal à la direction l, m, n, avec laquelle les plans tangents à la développable font un même angle φ; si $\mathfrak{S}$ est l'aire des deux nappes, Ω_1 l'aire de la conique C_1,

on aura

$$\mathfrak{S}\cos\varphi = 2\,\text{proj.}\,\Omega_1.$$

Or on trouve aisément, en désignant par $\frac{x^2}{a^2+\theta} + \ldots - 1 = 0$ l'équation de E_1,

$$\text{proj.}\,\Omega_1 = \frac{\pi}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\sqrt{\frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}}\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)},$$

et, d'après (21),

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}}\sqrt{\frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}},$$

d'où

$$\mathfrak{S} = 2\pi\sqrt{\frac{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta}},$$

ce qui est bien indépendant de l, m, n.

67. Cela posé, considérons l'aire $S\frac{1}{2}$, comprise, sur une des nappes de la développable, entre la courbe de contact avec E et la conique C_2; cette portion de surface comprend à son intérieur, sur E, une calotte dont la base est une des boucles du parallèle (l, m, n, φ); projetons les deux aires $\frac{1}{2}S$, et les deux calottes qu'elles comprennent, sur un plan normal à l'axe du parallèle; il vient évidemment

$$S\cos\varphi = \text{proj. de l'aire des deux calottes.}$$

Or, si nous découpons les deux calottes à projeter en zones infiniment petites par des parallèles de même axe l, m, n, et d'angle variable, on aura, en revenant aux notations du n° **57**, pour l'élément de la projection

$$d\sigma' = dx\,dy\,\frac{\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}}{Cz}\,\frac{Alx+Bmy+Cnz}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\sqrt{A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2}},$$

c'est-à-dire,

$$d\sigma' = \frac{dx\,dy}{Cz}\,\frac{\alpha x+\beta y+\gamma z}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

ou, en remplaçant, comme au n° **58** les variables x et y par les variables u et v,

$$d\sigma' = du\,dv\,\frac{4u(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3 Q}{\Delta}\,\frac{1}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}};$$

on a donc, d'après l'expression (3) de $\cos\varphi$,

$$S = u\int\int 4u\,du\,dv\sum\frac{Q(\alpha x+\beta y+\gamma z)^3}{\Delta},$$

les variables et la somme $\sum$ étant les mêmes que dans l'équation (5). En posant encore

$$U = (\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)u,$$

on trouve

$$S = u\sum\pm\frac{\pi i}{2}\frac{d^2}{d\theta^2}\int_{U_1}^{U}\frac{U\,dU(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)}{BC(C-B)\eta\zeta},$$

$\frac{S}{u}$ est identique à l'expression (11) de σ, où l'on aurait divisé par u la quantité sous le signe $\int$.

On en conclut, toujours comme au n° **58**,

$$BC(C-B)S = u\sum\pm\frac{\pi i}{2}\left[\int_{U_1}^{U}U(\alpha+\beta\eta+\gamma\zeta)\,dU\,\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{\eta\zeta}\right)+\frac{U^2}{u\eta\zeta}\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right)\right].$$

Si l'on pose encore $U^2-A^2=A\lambda$, il vient, en suivant toujours pas à pas les calculs faits plus haut,

$$S = u\sum\pm\frac{\pi}{2\sqrt{BC}}\int\frac{[\lambda(B+C)+2BC]}{2A(\lambda+B)^{\frac{3}{2}}(\lambda+C)^{\frac{3}{2}}}\left[\alpha+\beta i\frac{\sqrt{C+\lambda}\sqrt{A}}{\sqrt{B(C-B)}}+\gamma\frac{\sqrt{B+\lambda}\sqrt{A}}{\sqrt{C(C-B)}}\right]$$
$$+\sum\pm\frac{\pi i}{2}\frac{U^2}{\eta\zeta}\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right).$$

L'intégrale qui figure au second membre s'obtient de suite; il vient

$$S = \sum\pm\frac{\pi}{2}\left[\frac{\alpha}{2A\sqrt{BC}}\frac{\lambda}{\sqrt{(B+\lambda)(C+\lambda)}}-\frac{\beta i}{2\sqrt{AC}\sqrt{C-B}\sqrt{B+\lambda}}-\frac{\gamma}{2\sqrt{AB}\sqrt{C-B}\sqrt{C+\lambda}}\right]$$
$$+\sum\pm\frac{\pi i}{2}\frac{U^2}{\eta\zeta}\left(\frac{d^2U}{d\theta^2}\right).$$

68. Soit maintenant σ l'aire des deux calottes ellipsoïdales comprises à l'intérieur des deux portions de développable considérées; elle est donnée par la formule (15), les limites étant convenablement choisies, et d'ailleurs les mêmes que pour S. On voit alors que dans l'expression $S - \sigma$, les termes en $\left(\frac{d^2 U}{d\theta^2}\right)$ disparaissent, et il reste, en remplaçant u par $\frac{U}{\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta}$, ou par $\frac{\sqrt{A}\sqrt{A+\lambda}}{\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta}$,

$$S - \sigma = \sum \pm \frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{A}\sqrt{A+\lambda}\,(C-B)^{-\frac{1}{2}}}{\alpha + \beta \dfrac{i\sqrt{A}\sqrt{C+\lambda}}{\sqrt{B(C-B)}} + \gamma \dfrac{\sqrt{A}\sqrt{B+\lambda}}{\sqrt{C(C-B)}}}$$

$$\times \left[\frac{\alpha\lambda\sqrt{C-B}}{2A\sqrt{BC}\sqrt{(B+\lambda)(C+\lambda)}} - \frac{\beta i}{2\sqrt{AC}\sqrt{B+\lambda}} - \frac{\gamma}{2\sqrt{AB}\sqrt{C+\lambda}}\right]$$

$$- \sum \pm \frac{\pi}{2\sqrt{ABC}} \left[\frac{\lambda\sqrt{A+\lambda}}{\sqrt{(B+\lambda)(C+\lambda)}} - \frac{1}{2}\int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{(A+\lambda)(B+\lambda)(C+\lambda)}}\right].$$

Introduisons les fonctions elliptiques par les formules (16), il vient

$$S - \sigma = \sum \pm \frac{\pi u}{2} \frac{abc}{(e_2 - e_3)^{\frac{1}{2}}} \left[\beta b i (e_1 - e_2)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_3}{\sigma} v + \gamma c (e_1 - e_3)^{\frac{1}{2}} \frac{\sigma_2}{\sigma_1} v\right]$$

$$- \sum \pm \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{\rho}{3}} \int \left[e_1 - 1 + \frac{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}{pv - e_1}\right] dv.$$

Les sommes s'étendent toujours aux quatre zéros distincts à des multiples près de 4ω, $4\omega'$, de l'équation (17) en v.

L'intégrale qui figure au second membre est

$$\sum \pm \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,[-\zeta(v+\omega) - v];$$

et l'on a

$$\zeta(v+\omega) = \zeta v + \zeta\omega + \frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1}.$$

Les termes en $\zeta\omega$ se détruisent deux à deux, à cause du choix des signes (**64**); faisant passer le terme $\frac{1}{2}\frac{p'v}{pv - e_1}$ sous la première somme, il vient par un calcul facile, en remplaçant α, β, γ, u par leurs va-

leurs (3) en fonction de l, m, n, $\cos\varphi$, et tenant compte de (16 *bis*) et (17),

$$S - \sigma = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\sum \pm \frac{l_1\sigma_2 v\sigma_3 v + l_2\sigma_3 v\sigma_1 v + l_3\sigma_1 v\sigma_2 v}{(l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v)\sigma v} - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\Sigma \pm (\zeta v + v).$$

Soient v_1, $h - v_1$; v_2, $-h - v_2$ les quatre racines de l'équation (17) en v; posons

$$\chi(v) = \frac{l_1\sigma_2 v\sigma_3 v + l_2\sigma_1 v\sigma_3 v + l_3\sigma_2 v\sigma_1 v}{(l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v)\sigma v},$$

il vient, d'après ce qui a été dit sur le choix des signes,

$$\begin{aligned} S - \sigma = {} & \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\chi(v_1) + \chi(h - v_1) - \chi(v_2) - \chi(-h - v_2)] \\ & - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}[\zeta v_1 + \zeta(h - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-h - v_2) + 2h]. \end{aligned}$$

Pour avoir la valeur de $S - \sigma$, c'est-à-dire l'excès des deux portions de nappe considérées de la développable sur l'aire ellipsoïdale qu'elles comprennent, il faut faire varier φ de 0 à φ, et par suite, d'après (21) et (26), θ à partir de ∞, et h à partir de 0.

69. Or de l'équation (17),

$$\frac{\cos\varphi}{abc}\sigma v = l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v,$$

où l'on fait successivement $v = v_1$, v_2, $h - v_1$, on tire les valeurs proportionnelles de $\cos\varphi$, l_1, l_2, l_3, et en les portant dans la relation précédente, on voit sans difficulté que le second membre est indépendant de v_1 et v_2, parce qu'il ne peut devenir infini pour aucune valeur de v_1 et v_2. Ce second membre est donc seulement une fonction de h, ou de θ (26), et par suite $S - \sigma$ est constant quand la conique C_1 décrit l'ellipsoïde E_1.

En introduisant, au lieu de S, l'aire S_1 des deux nappes de la développable comprises entre C_1 et la courbe de contact sur E, et, au lieu de l'aire des deux calottes ellipsoïdales, l'aire du parallèle, on a, puisque

$S + S_1$ est constant, ainsi qu'on l'a démontré au n° **66**, le théorème suivant, tout à fait analogue à celui de Graves et Chasles sur les arcs de conique :

Sur un ellipsoïde E_1, *extérieur et homofocal à un ellipsoïde* E, *on prend une conique quelconque, dont le plan passe par le centre, et l'on circonscrit à cette conique et à* E *une développable : l'excès de l'aire de cette développable, limitée à la conique et à l'ellipsoïde* E, *sur l'aire ellipsoïdale comprise sur* E *à son intérieur, est constant.*

70. Le théorème de Lebesgue (n° **55**) est un cas particulier de cette proposition ; on l'obtient en supposant que la conique choisie est située dans un des plans principaux de E_1. Quant à la valeur de la constante, elle peut se déterminer en partant de ce qui précède, ou, plus simplement, en s'appuyant sur les formules données pour les zones de Lebesgue.

Si l'on suppose que la conique C_1 soit dans le plan $z = 0$, l'aire du parallèle correspondant sera, en gardant les notations du n° **55** et désignant par Σ_0 l'aire de l'ellipsoïde, $2(\Sigma_0 - \Omega)$; l'aire S_1 sera donnée par la formule

$$S_1 \cos\varphi = 2\,\text{aire}\,C_1 - 2\omega, \tag{28}$$

Ω et ω ayant les mêmes significations qu'au n° **55**.

On a trouvé

$$\Omega = \frac{\omega}{\cos\varphi} - \pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) + \Sigma_0, \tag{29}$$

u étant défini par

$$\frac{\operatorname{tang}^2\varphi}{c^2} = \frac{\rho}{3a^2b^2c^2}(pu - 1). \tag{30}$$

D'ailleurs on a

$$\text{aire}\,C_1 = \pi\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)},$$

et, par l'équation (21),

$$\cos^2\varphi = \frac{\theta}{c^2+\theta}. \tag{31}$$

Il vient alors, pour la valeur de la constante cherchée, qui est égale à $S_1 - 2(\Sigma_0 - \Omega)$,

$$2\pi \frac{\sqrt{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}}{\sqrt{\theta}} - 2\frac{\omega}{\cos\varphi} - 2\left[\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u) - \frac{\omega}{\cos\varphi}\right],$$

c'est-à-dire

$$2\pi\sqrt{\frac{(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta}} - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta u + u).$$

Ainsi, l'on peut dire que *l'excès de l'aire de la développable sur celle du parallèle a pour valeur*

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\left[\sqrt{\frac{3(a^2+\theta)(b^2+\theta)(c^2+\theta)}{\theta\rho}} - \zeta w - w\right],$$

w étant la plus petite valeur positive définie en fonction de θ par la relation, déduite de (30) *et* (31),

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \mathrm{p}w - 1.$$

Expression complète de l'aire du parallèle.

71. En partant de la formule (18) et en calculant $\frac{d^2U}{d\theta^2}$ par la relation (13), on arrive, pour l'aire du parallèle d'axe l, m, n et d'angle φ, à l'expression suivante.

Soient θ la racine positive de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+\theta} + \frac{m^2}{b^2+\theta} + \frac{n^2}{c^2+\theta} = \frac{\cos^2\varphi(l^2+m^2+n^2)}{\theta},$$

et w le plus petit argument positif défini par la relation

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \mathrm{p}w - 1.$$

Posons, l_1, l_2, l_3 étant toujours définis en fonction de l, m, n par (16 *bis*),

$$\mathfrak{F}(v) = \frac{l_1\sigma_1 v[\sigma_1^2 v + (1+2e_1)\sigma^2 v] + l_2\sigma_2 v[\sigma_2^2 v + (1+2e_2)\sigma^2 v] + l_3\sigma_3 v[\sigma_3^2 v + (1+2e_3)\sigma^2 v]}{(l_1\sigma_2 v\,\sigma_3 v + l_2\sigma_1 v\,\sigma_3 v + l_3\sigma_1 v\,\sigma_2 v)\,\sigma v}.$$

L'équation

$$(19) \qquad \frac{\cos\varphi}{abc}\,\sigma v = l_1\sigma_1 v + l_2\sigma_2 v + l_3\sigma_3 v$$

a, dans un parallélogramme 4ω, $4\omega'$, quatre zéros, dont deux ont pour somme $2w$, et les deux autres $-2w$, à des multiples près de 4ω, $4\omega'$; soient v_1, $2w - v_1$, v_2, $-2w - v_2$ ces zéros. On aura, pour l'aire comprise entre deux parallèles,

$$\begin{aligned}\sigma = \quad & \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,[\zeta v_1 + \zeta(2w - v_1) - \zeta v_2 - \zeta(-2w - v_2) + 4w] \\ & - \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,[\mathfrak{F}(v_1) + \mathfrak{F}(2w - v_1) - \mathfrak{F}(v_2) - \mathfrak{F}(-2w - v_2)],\end{aligned}$$

le second membre étant pris entre les limites qui correspondent aux deux parallèles.

On voit bien que la partie transcendante est $2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}(\zeta w + w)$.

Pour se rendre compte de la nature de la partie algébrique, on peut substituer à l'équation (17) une équation du quatrième ordre en pv, en remplaçant $\frac{\sigma_\alpha}{\sigma}$ par $\sqrt{pv - e_\alpha}$; et, si l'on désigne ses racines par P_1, P_2, P_3, P_4, la partie algébrique de σ est de la forme

$$\varphi(P_1) + \varphi(P_2) - \varphi(P_3) - \varphi(P_4),$$

φ étant une fonction rationnelle.

Pour avoir l'aire d'un parallèle, il faut prendre le second membre à partir des valeurs qui correspondent à $\cos\varphi = 0$, c'est-à-dire, comme on l'a dit déjà, à $w = 0$. En ce cas, ζ et $\mathfrak{F}$ étant des fonctions impaires, le second membre s'annule pour la limite inférieure, et il suffit de substituer les valeurs qui correspondent au parallèle considéré.

Autres aires ellipsoïdales réductibles aux fonctions algébriques, elliptiques ou logarithmiques.

72. Soit toujours E un ellipsoïde; menons les plans tangents communs à E et à une sphère extérieure à cette surface. La courbe de contact sur E se compose de deux boucles fermées, et c'est l'aire comprise entre ces deux boucles que nous allons maintenant évaluer.

Désignons par l, m, n les coordonnées du centre de la sphère, par R son rayon: la courbe de contact a pour équations

$$(32)\qquad f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

$$(33)\qquad \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{1}{R^2}\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^2.$$

Supposons que la sphère se déplace de telle façon que son centre reste sur une droite issue du centre de E, et que son rayon varie proportionnellement à la distance des deux centres; on aura ainsi, u étant un paramètre, α, β, γ, r, des quantités fixes,

$$\frac{l}{a^2} = \frac{\alpha}{u}, \qquad \frac{m}{b^2} = \frac{\beta}{u}, \qquad \frac{n}{c^2} = \frac{\gamma}{u}, \qquad R = \frac{r}{u},$$

et la deuxième équation devient

$$(34)\qquad \varphi = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{r^2}(\alpha x + \beta y + \gamma z - u)^2 = 0.$$

L'aire comprise entre les courbes de contact correspondant à deux de ces sphères, de paramètres u_1 et u, a pour expression, d'après les raisonnements faits au n° **57**, $P = 0$, $Q = 0$ désignant les équations de deux plans convenablement choisis,

$$s = 4\int_{u_1}^{u} du \int_{-\infty}^{+\infty} dv \sum \frac{Q(\alpha x + \beta y + \gamma z - u)^2}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des premiers membres des équations (32), (34), et $P + vQ = 0$, et la somme s'étendant aux points communs aux trois surfaces représentées par ces équations.

En appliquant la formule (8) du n° **20**, cette somme devient égale à cette autre,

$$\sum \frac{d}{d\theta} \frac{Q(1, \eta, \zeta, \theta)(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta - u\theta)^2}{(P + vQ)(f'_\eta \varphi'_\zeta - f'_\zeta \varphi'_\eta)},$$

étendue aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$, et où l'on fait finalement θ nul. Soient η, ζ les coordonnées d'un de ces points. On a, par (32) et (33),

$$\frac{1}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} = 0,$$

$$\frac{1}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4} - \frac{1}{r^2}(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)^2 = 0;$$

$$\frac{\eta}{b^2}\frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\zeta}{c^2}\frac{d\zeta}{d\theta} = 0,$$

$$\frac{\eta}{b^4}\frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\zeta}{c^4}\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{1}{r^2}(\alpha + \beta\eta + \gamma\zeta)\left(\beta\frac{d\eta}{d\theta} + \gamma\frac{d\zeta}{d\theta} - u\right).$$

Il en résulte que η et ζ sont indépendants de u; que $\frac{d\eta}{d\theta}$ et $\frac{d\zeta}{d\theta}$ sont de la forme $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}u$, $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$ étant indépendants de u, et, par suite, s sera de la forme

$$s = \int\int du\, dv \sum \left[\frac{\mathfrak{M}u + \mathfrak{N}}{P + vQ} + \frac{\mathfrak{M}_1 u + \mathfrak{N}_1 + v(\mathfrak{M}_2 u + \mathfrak{N}_2)}{(P + vQ)^2}\right],$$

les quantités $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, ... étant indépendantes de u et de v; ce qu'on peut écrire, en effectuant la somme,

$$s = \int\int du\, dv\, [\mathfrak{F}_0(v) + u\mathfrak{F}_1(v)].$$

$\mathfrak{F}_0$ et $\mathfrak{F}_1$ sont ici rationnels en v, l'intégrale double est par suite une fonction entière et du second ordre en u, et une fonction rationnelle et logarithmique de v. Si l'on fait varier v entre $-\infty$ et $+\infty$, on obtient l'aire annulaire cherchée, qui est dès lors une fonction entière et du second ordre de u. Or, pour $u = 0$, la courbe de contact se réduit à un parallèle d'axe l, m, n, et dont l'angle φ est défini par la relation

$$R = \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\cos\varphi.$$

ainsi que le montre l'équation (34). On sait évaluer l'aire d'un parallèle: la formule précédente permet d'évaluer l'aire comprise entre le parallèle et la courbe de contact qui correspond à l'une des sphères considérées: il en résulte qu'on saura, par différence, évaluer l'aire comprise entre les deux boucles de cette dernière courbe. D'après ce qui précède, *cette aire ne différera de celle du parallèle correspondant que par une fonction algébrique.*

73. On peut résumer ces résultats de la manière suivante :

Soient deux sphères, C_0 *et* C, *inscrites à un même cône de révolution, concentrique à un ellipsoïde* E; *menons les plans tangents à* E *et à chacune des deux sphères, appelons* Γ_0 *et* Γ *les courbes de contact sur l'ellipsoïde, et faisons varier la sphère* C, *en la laissant toujours inscrite dans le cône.*

L'aire comprise sur l'ellipsoïde entre les boucles des deux courbes Γ_0 *et* Γ *est une fonction entière et du second ordre de l'inverse du rayon* R *de la sphère variable.*

La somme algébrique des quatre aires comprises entre les courbes Γ_0, Γ *et deux plans quelconques est aussi une fonction du second ordre de* $\frac{1}{R}$; *c'est de plus une fonction rationnelle et logarithmique des coefficients des deux plans.*

74. Quant à l'*aire* s *comprise entre les deux boucles de la courbe* Γ, elle est égale, à une fonction algébrique près, à la partie transcendante de l'aire du parallèle correspondant (n° **72**). Soient l, m, n les coordonnées du centre, R le rayon de la sphère; l'aire s *aura pour expression*

$$s = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) + \mathfrak{R},$$

$\mathfrak{R}$ étant algébrique, et w étant le plus petit argument positif défini par la relation

$$\frac{3a^2b^2c^2}{\theta\rho} = \wp w - 1,$$

où θ désigne la racine positive de l'équation

$$(21)\qquad \frac{l^2}{a^2+\theta}+\frac{m^2}{b^2+\theta}+\frac{n^2}{c^2+\theta}=\frac{R^2}{\theta}.$$

Nous avons donc sur l'ellipsoïde une nouvelle série d'aires réductibles aux intégrales elliptiques; celles qui ont été considérées jusqu'ici en sont des cas particuliers, et, d'une manière générale, nous pouvons dire que :

L'aire ellipsoïdale limitée par une courbe à deux boucles, le long de laquelle les plans menés tangentiellement à l'ellipsoïde touchent une sphère extérieure à la surface, est exprimable par les fonctions elliptiques et algébriques.

Elle est équivalente, à une fonction algébrique près, à celle d'une zone ellipsoïdale à bases parallèles, les paramètres de la zone étant définis algébriquement en fonction de ceux de la sphère (n° **54**).

75. On peut donner à cette proposition une autre forme. Nous avons montré, dans un travail déjà rappelé, que la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère C a ses quatre coniques doubles sur quatre quadriques homofocales à E,

$$\frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}-1=0,$$

les quatre valeurs de k étant les racines de l'équation

$$\frac{l^2}{a^2+k}+\frac{m^2}{b^2+k}+\frac{n^2}{c^2+k}-1=\frac{R^2}{k};$$

de plus, le plan de chaque conique est le plan polaire du centre de la sphère par rapport à la quadrique correspondante [1]. Il en résulte aisément les conséquences suivantes :

Soit E_1 *un ellipsoïde extérieur et homofocal à l'ellipsoïde* E.

$$(E_1)\qquad \frac{x^2}{a^2+k}+\frac{y^2}{b^2+k}+\frac{z^2}{c^2+k}-1=0;$$

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIII, p. 99 et suiv.

considérons sur E_1 *la conique située dans le plan*

$$\lambda x + \mu y + \nu z + \varpi = 0,$$

et circonscrivons à cette conique et à E *une développable; l'aire comprise sur* E *entre les deux boucles de la courbe de contact a une expression de la forme*

$$2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) + \mathfrak{R}',$$

$\mathfrak{R}'$ *étant algébrique en* λ, μ, ν, ϖ, k, *et* w *désignant le plus petit argument positif défini par la relation*

$$\wp w - 1 = \frac{3a^2b^2c^2}{\theta_1\rho},$$

où θ_1 *est la racine positive de l'équation*

$$a^2\lambda^2\frac{a^2+k}{a^2+\theta_1} + b^2\mu^2\frac{b^2+k}{b^2+\theta_1} + c^2\nu^2\frac{c^2+k}{c^2+\theta_1} = \frac{k\varpi^2}{k-\theta_1}.$$

76. Dans le cas où la sphère C a son centre sur un des axes de l'ellipsoïde, Ox par exemple, l'aire ellipsoïdale comprise entre les deux boucles de la courbe de contact de la développable circonscrite à l'ellipsoïde et à la sphère a l'expression suivante, qu'on trouve en appliquant la méthode du n° **57**,

$$s = 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\zeta w + w) - 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,(\wp w - 1)\,\frac{\sigma_1 w\,\sigma w}{\sigma_2 w\,\sigma_3 w}$$
$$- 2\pi\sqrt{\frac{\rho}{3}}\,\frac{a^2}{l^2}\left(\frac{\sigma_1 w\,\sigma w}{\sigma_2 w\,\sigma_3 w}\right)^3 [3e_1\wp w + e_1^2 + 2e_2e_3],$$

l désignant l'abscisse du centre, et w étant défini, en fonction de l et du rayon R, par la relation

$$3\,\frac{l^2 - R^2}{R^2}\,\frac{b^2c^2}{\rho} = \wp w - 1.$$

On doit supposer, pour appliquer cette formule, que la sphère est extérieure à l'ellipsoïde.

77. Soit toujours Γ la courbe de contact avec l'ellipsoïde E de la développable circonscrite à E et à la sphère C; si l'on coupe cette courbe par deux plans, on obtient sur l'ellipsoïde, entre la courbe et les deux plans, deux aires curvilignes dont la somme algébrique n'est généralement pas exprimable par les fonctions elliptiques ou algébriques; elle le devient si les deux plans sont parallèles.

Considérons, en effet, deux sphères concentriques, de centre l, m, n et de rayons infiniment voisins; soient u et $u + du$ les inverses de ces rayons; si nous menons les plans tangents à E et à chaque sphère, et si nous coupons les courbes de contact sur E par deux plans parallèles, $P + v = 0$; $P + v + dv = 0$, nous obtenons quatre aires ellipsoïdales infiniment petites, dont la somme algébrique a pour valeur

$$4\sum u^2 \frac{du\,dv\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^3}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des fonctions

$$f = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1,$$

$$\varphi = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - u^2\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2} - 1\right)^2,$$

et

$$P + v,$$

et la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $P + v = 0$.

On en conclut (n° **20**) que l'on a, pour l'aire finie qui correspond aux sphères u_1 et u, et aux plans v_1 et v, l'expression

$$s = 4\int_{u_1}^{u} u^2\,du \int_{v_1}^{v} dv \sum \frac{d}{d\theta}\,\frac{\left(\frac{l}{a^2} + \frac{m\eta}{b^2} + \frac{n\zeta}{c^2} - \theta\right)^3}{(P + v\theta)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)},$$

la somme s'étendant aux points communs aux surfaces $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$. Il en résulte sans difficulté que l'intégrale double est une fonction entière et du second ordre en v, et une fonction rationnelle et logarithmique en u (n° **55**). Si l'on part de la sphère de centre l, m, n et de rayon nul, pour laquelle la courbe de contact sur E se réduit à la

conique polaire du centre comptée deux fois, on voit aisément qu'on peut énoncer la proposition suivante :

La somme algébrique des deux aires ellipsoïdales limitées par deux plans parallèles et par une courbe à deux boucles, le long de laquelle les plans menés tangentiellement à l'ellipsoïde touchent une sphère, est une fonction algébrique et logarithmique des paramètres de la sphère; de plus, c'est une fonction entière et du second ordre du paramètre variable qui entre dans l'équation des plans.

Cette aire, en supposant la sphère fixe, est de la forme

$$s = \mathcal{A}(v^2 - v_1^2) + \mathcal{B}(v - v_1),$$

$\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ étant indépendants de v et v_1. On peut écrire

$$s = (v - v_1)[\mathcal{A}(v + v_1) + \mathcal{B}]$$

et, par suite,

La somme algébrique des deux aires ellipsoïdales précédentes est nulle si les deux plans parallèles varient en conservant leur direction et en restant équidistants d'un plan fixe, de même direction.

Cette proposition et la précédente s'appliquent à une quadrique quelconque; elles permettent de déterminer, sur une telle surface, une infinité d'aires, limitées par des courbes algébriques et exprimables par des fonctions rationnelles et logarithmiques.

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur les applications aux aires ellipsoïdales, et nous donnerons quelques propositions relatives aux aires sur une surface algébrique quelconque.

IV. — Aires sur une surface quelconque.

78. Soit $f(X, Y, Z) = 0$ l'équation d'une surface algébrique d'ordre m, en coordonnées rectangulaires; l'élément d'aire a pour expression

$$d\sigma = dX\,dY\,\frac{\sqrt{f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z}}{f'_Z}.$$

On peut évaluer aisément, comme dans le cas des quadriques, la somme algébrique des aires comprises sur la surface $f = 0$, entre deux plans parallèles et deux courbes le long desquelles les plans tangents à la surface touchent respectivement deux sphères concentriques.

Soient, en effet, l, m, n les coordonnées du centre de deux sphères voisines, u et $u + du$ les inverses de leurs rayons; $P + v = 0$ et $P + v + dv = 0$ deux plans parallèles voisins : la somme des aires infiniment petites à évaluer est (n° **30**)

$$2\sum \frac{u\,du\,dv(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^2\sqrt{f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z}}{\Delta},$$

Δ étant le jacobien des fonctions f, $P + v$, et φ, étant posé

$$\varphi = f'^2_X + f'^2_Y + f'^2_Z - u^2(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^2,$$

et la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $P + v = 0$. On peut l'écrire aussi

$$2\sum \frac{u^2\,du\,dv}{\Delta}(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^3,$$

et, d'après la formule du n° **20**, déjà si souvent appliquée, l'aire finie qui correspond aux sphères u_1 et u, et aux plans v_1 et v, sera

$$s = 2\int_{u_1}^{u} u^2\,du \int_{v_1}^{v} dv \sum \frac{d}{d\theta}\,\frac{(lf'_X + mf'_Y + nf'_Z + f'_t)^3}{(P + v\theta)(f'_\eta\varphi'_\zeta - f'_\zeta\varphi'_\eta)},$$

la somme s'étendant aux points communs à $f = 0$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$: on a remplacé X par 1, Y par η, Z par ζ et t par θ. Il résulte de là, comme dans le cas de l'ellipsoïde, que l'intégrale double est une fonction entière et du second ordre de v, et une fonction rationnelle et logarithmique de u. Donc :

Soient, sur une surface algébrique deux courbes, le long de chacune desquelles les plans tangents touchent respectivement deux sphères concentriques : la somme des aires comprises sur la surface entre ces deux courbes et deux plans parallèles est une fonction algébrique et logarithmique des paramètres des deux sphères, et

une fonction entière du second ordre du paramètre variable qui entre dans l'équation des plans.

Elle est nulle si les deux plans parallèles varient en conservant leur direction et en restant équidistants d'un plan fixe, de même direction.

Le même raisonnement montre que *la proposition est vraie,* non seulement pour deux sphères concentriques, mais *pour deux sphères quelconques.*

79. *Plus généralement,* en remplaçant les plans parallèles par un système de surfaces asymptotiques, $\Phi_1 + ct\Phi_2 = 0$, on verrait de même que la somme des aires correspondantes est une fonction entière et du second ordre de c; si les surfaces étaient asymptotes, $\Phi_1 + ct^2\Phi_2 = 0$, elle serait du premier ordre en c, et si elles étaient osculatrices à l'infini, $\Phi_1 + ct^3\Phi_2 = 0$, la somme des aires serait nulle.

80. Soit, sur la surface $f = 0$, une série de courbes définies par une équation de la forme

$$f_X'^2 + f_Y^2 + f_Z'^2 = \varphi^2(X, Y, Z, u),$$

où φ est un polynôme entier, de degré $(m - 1)$ au plus en X, Y, Z, et de degré quelconque en u.

On voit, par le même raisonnement, que *la somme des aires comprises sur la surface entre deux de ces courbes et deux plans parallèles est une fonction rationnelle et logarithmique du paramètre u, et une fonction entière, d'ordre deux, du paramètre qui entre dans l'équation des plans parallèles.*

Si φ était d'ordre $m - 3$ en X, Y, Z, *la somme précédente serait toujours nulle.*

On a donc ainsi une infinité de manières de déterminer, sur une surface quelconque, des aires dont la somme algébrique soit exprimable par les fonctions élémentaires.

Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel;

PAR M. J. DOLBNIA.

1. M. Günther nomme intégrales *pseudo-elliptiques* les intégrales qui, tout en présentant toutes les apparences extérieures des elliptiques, peuvent être exprimées par les fonctions algébriques et logarithmiques (¹). Nous nommerons *intégrales pseudo-elliptiques d'Abel* celles de la forme suivante

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}};$$

dans le cas où ces dernières sont exprimables par des logarithmes. M. Tchebycheff a créé la théorie d'exprimabilité des intégrales pseudo-elliptiques d'Abel par des logarithmes (²); les théorèmes de M. Tchebycheff ont été démontrés par feu M. Zolotareff dans un Mémoire inséré dans le tome XIX, 2ᵉ série, du *Journal de Mathématiques*. Malgré tout le mérite du travail de Zolotareff, on ne peut s'empêcher de remarquer que sa méthode de démonstration est très compliquée, ce qui s'explique par le fait que l'auteur s'est servi pour cette démonstration des fonctions elliptiques anciennes, à l'aide desquelles l'*inver-*

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X, p. 88; 1882.

(²) *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III; 1861.

sion des intégrales elliptiques s'obtient avec une grande difficulté. Il est bien connu que la théorie nouvelle des fonctions elliptiques de Weierstrass a opéré un grand progrès dans l'Analyse. En se servant des nouvelles fonctions elliptiques, on peut atteindre la plus grande simplicité dans la question qui nous occupe.

Nous commencerons par l'inversion des intégrales elliptiques.

Étant donné le polynôme

$$(1) \qquad X = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4,$$

le problème nommé *inversion* consiste, comme on le sait, à exprimer la variable x et $\sqrt{X}$ à l'aide des fonctions elliptiques d'un même argument. Chaque polynôme (1) se transforme en

$$X = a_0(\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4) = a_0\Psi,$$

à l'aide de la substitution

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi.$$

Nous avons encore

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2},$$

$$\alpha_3 = \frac{a_0^2 a_3 - 3a_0 a_1 a_2 + 2a_1^3}{a_0^3}.$$

En extrayant la racine carrée $\sqrt{\Psi}$, nous trouverons que la partie entière de la racine sera

$$\xi^2 + 3\alpha_2,$$

donc

$$\Psi = (\xi^2 + 3\alpha_2)^2 + (4\alpha_3\xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2).$$

Posons

$$\sqrt{\Psi} = \xi^2 + 3\alpha_2 - \frac{2}{x_1}.$$

En chassant le radical et le dénominateur dans cette équation, nous obtiendrons les deux formes suivantes :

$$(a) \qquad (4\alpha_3\xi + \alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 4(\xi^2 + 3\alpha_2)x_1 - 4 = 0,$$

$$(b) \qquad 4x_1\xi^2 + 4\alpha_3 x_1^2\xi + (\alpha_4 - 9\alpha_2^2)x_1^2 + 12\alpha_2 x_1 - 4 = 0.$$

En résolvant ces équations relativement à x_1 et ξ, nous trouverons

$$\xi = \frac{-\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1}}{2x_1},$$

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3\alpha_2) \pm \sqrt{\xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4}}{2\alpha_3\xi + \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{2}},$$

ou

$$x_1 = \frac{-(\xi^2 + 3\alpha_2) \pm \sqrt{\Psi}}{2\alpha_3 + \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{2}},$$

$$\xi = \frac{-\alpha_3 x_1^2 \pm \sqrt{X_1}}{2x_1},$$

en posant

$$\alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1 = X_1.$$

D'après la propriété bien connue des équations doublement quadratiques, nous aurons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \pm \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} \quad (^1).$$

Prenons

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}.$$

Posons

$$x_1 = \frac{1}{z + \alpha_2},$$

alors

$$\sqrt{X_1} = \frac{1}{(z + \alpha_2)^2} \sqrt{4z^3 - (3\alpha_2 + \alpha_4) z - (\alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2)};$$

$$dx_1 = -\frac{dz}{(z + \alpha_2)^2},$$

donc

$$\frac{d\xi}{\sqrt{\Psi}} = \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{-dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}},$$

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. t. II, p. 333; 1888.

où

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4,$$

$$g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

En posant

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = u,$$

nous aurons

$$\frac{dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}du,$$

$$z = \wp(u, g_2, g_3),$$

$$-\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3} = \wp'(u, g_2, g_3).$$

Posons, avec M. Halphen [1],

$$\alpha_2 = -\wp(c, g_2, g_3),$$

alors

$$[\wp'(c, g_2, g_3)]^2 = -4\alpha_2^3 + 3\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2\alpha_4 + \alpha_2^3 + \alpha_3^2 = \alpha_3^2,$$

prenons

$$\alpha_3 = \wp'(c, g_2, g_3).$$

Alors

$$x_1 = \frac{1}{\wp u - \wp c},$$

$$\sqrt{X_1} = \frac{-\wp' u}{(\wp u - \wp c)^2},$$

$$\xi = \frac{-\wp' c}{2(\wp u - \wp c)} + \frac{\wp' u}{2(\wp u - \wp c)} = \frac{1}{2}\frac{\wp' u - \wp' c}{\wp u - \wp c},$$

par conséquent,

$$\sqrt{\Psi} = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' c}{\wp u - \wp c}\right)^2 - 3\wp c - 2\wp u + 2\wp c.$$

---

[1] Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 120.

Mais, d'après la formule d'addition, nous aurons

$$\frac{1}{4}\left(\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}\right)^2 = \wp(u+v) + \wp u + \wp v,$$

par conséquent,

$$\sqrt{\Psi} = \wp(u+v) - \wp u,$$

$$\sqrt{X} = \sqrt{a_0}\,[\,\wp(u+v) - \wp u],$$

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}.$$

En exprimant les invariants g_2 et g_3 par les coefficients de X, nous aurons

$$g_2 = \frac{1}{a_0^2}(a_0 a_4 - 4a_1 a_3 + 3a_2^2),$$

$$g_3 = \frac{1}{a_0^3}(a_0 a_2 a_4 + 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_3^2 - a_1 a_4).$$

2. Comme base de l'argument elliptique, nous avons pris

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = \sqrt{a_0}\int \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

Posons

$$z = \frac{t}{a_0}, \qquad g_2 = \frac{h_2}{a_0^2}, \qquad g_3 = \frac{h_3}{a_0^3};$$

alors

$$-\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}} = -\sqrt{a_0}\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2 t - h_3}},$$

par conséquent,

$$-\int \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - h_2 t - h_3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{X}};$$

d'où il découle que, pour le passage de l'argument

$$u = -\int \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

il faut changer z en $a_0 z$, g_2 en $a_0^2 g_2$, g_3 en $a_0^3 g_3$.

Par cette raison, nous aurons

$$\wp\left(\frac{v}{\sqrt{a_0}}, a_0^2 g_2, a_0^3 g_3\right) = -a_0 \alpha_2.$$

$$\wp'\left(\frac{v}{\sqrt{a_0}}, a_0^2 g_2, a_0^3 g_3\right) = a_0^{\frac{3}{2}} \alpha_3.$$

Donc, en rapportant $\wp v$ à l'argument

$$\int \frac{dx}{\sqrt{X}},$$

nous devons changer les invariants

$$g_2, \quad g_3$$

dans les invariants

$$a_0^2 g_2, \quad a_0^3 g_3,$$

et alors nous aurons

$$\wp(v) = -a_0 \alpha_2, \qquad \wp' v = a_0^{\frac{3}{2}} \alpha_3.$$

Cette remarque importante nous servira dans la suite.

5. Trouvons maintenant les conditions d'intégrabilité de différentielles

$$\frac{(x + \mathrm{H})dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4 a_1 x^3 + 6 a_2 x^2 + 4 a_3 x + a_4}}$$

par des logarithmes.

En remarquant que

$$x + \mathrm{H} = -\frac{a_1}{a_0} + \mathrm{H} + \frac{1}{2}\,\frac{\wp' u - \wp' v}{\wp u - \wp v}$$

et

$$\frac{dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}=\frac{1}{\sqrt{a_0}}du$$

nous obtiendrons

$$\int\frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}=\frac{1}{\sqrt{a_0}}\int\left(\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}+\mathrm{H}-\frac{a_1}{a_0}\right)du.$$

En remarquant que

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{p}'u-\mathrm{p}'v}{\mathrm{p}u-\mathrm{p}v}=\zeta(u+v)-\zeta(u)-\zeta(v)\ \text{(}^1\text{)}.$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\int\frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}&\\ =\frac{1}{\sqrt{a_0}}\int\left[\zeta(u+v)-\zeta u-\zeta v+\mathrm{H}-\frac{a_1}{a_0}\right]du.&\\ =\frac{1}{\sqrt{a_0}}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}+\left(\mathrm{H}-\frac{a_1}{a_0}-\zeta v\right)u.&\end{aligned}$$

En posant

$$\mathrm{H}-\frac{a_1}{a_0}-\zeta v=\mathrm{J},$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\int\frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}}&\\ =\frac{1}{\sqrt{a_0}}\log\left[e^{\mathrm{J}u}\,\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\right]&\\ =\frac{1}{m\sqrt{a_0}}\log e^{m\mathrm{J}u}\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\right]^m.&\end{aligned}$$

où m est entier positif.

On sait que

$$e^{m\mathrm{J}u}\left[\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}\right]^m$$

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 138.

est exprimable rationnellement par $\wp(u)$ et $\wp'(u)$ si

$$(1) \qquad c = -\frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

$$(2) \qquad J = \frac{2\tilde{\eta}}{m} \quad (^1).$$

Le choix de H, par la nature du problème, dépend de notre volonté. Si $c = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$, nous prendrons

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

alors

$$J = \frac{2\tilde{\eta}}{m};$$

mais avec cette valeur de J, l'intégrale

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

s'exprime par les logarithmes.

Ainsi ayant

$$\alpha_2 = \frac{a_2 a_0 - a_1^2}{a_0^2} = -\wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right)$$

et supposant

$$H = \frac{2\tilde{\eta}}{m} - \zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) + \frac{a_1}{a_0},$$

on peut exprimer

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

par une fonction logarithmique des quantités

$$\wp u = z \qquad \text{et} \qquad \wp' u = -\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

et, par conséquent, par une fonction logarithmique de x.

---

(1) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, etc., t. I, p. 224.

4. Soit m un nombre impair; alors on peut satisfaire à la congruence

$$2^s \equiv 1 \pmod{m}$$

par s entier et positif.

Posons

$$2^s - 1 = lm,$$

l étant entier; alors

$$2^s v = -(lm+1)\frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

ou

$$2^s v = -2l\tilde{\omega} - \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

par conséquent,

$$\wp(2^s v) = \wp\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) = \wp(v).$$

D'où il suit qu'en doublant successivement l'argument s fois, nous arriverons au résultat

$$\wp(2^s v) = -\alpha_2.$$

Maintenant posons m pair; alors nous aurons

$$m = 2^i n,$$

où n est impair. En doublant l'argument

$$v = -\frac{2\tilde{\omega}}{m}$$

successivement i fois, nous trouverons

$$2^i v = -\frac{2\tilde{\omega}}{n} = v_1.$$

Posons

$$2^k - 1 = ln;$$

nous aurons

$$2^k v_1 = -(ln+1)\frac{2\tilde{\omega}}{n},$$

$$\wp(2^{i+k} v) = \wp(v_1) = \wp(2^i v).$$

D'où il suit, qu'en doublant l'argument v successivement $(i+k)$ fois, nous trouverons

$$\wp(2^{i+k}v) = \wp(2^i v).$$

Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

est exprimable par des logarithmes, nous trouverons nécessairement en doublant l'argument v, défini par l'équation,

$$\wp(v) = \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^2}$$

ou

$$\wp(2^s v) = \wp(v),$$

ou

$$\wp(2^{i+k} v) = \wp(2^i v).$$

Il est facile de prouver que le théorème inverse est aussi juste. En effet, de la condition

$$\wp(2^s v) = \wp(v)$$

nous tirons

$$2^s v = v \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^s - 1} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m}.$$

Également de la condition

$$\wp(2^{i+k} v) = \wp(2^i v)$$

nous tirons

$$2^{i+k} v = 2^i v \pm 2\tilde{\omega},$$

d'où

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{2^i(2^k - 1)} = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

mais dans le n° 3 nous avons démontré que, si

$$v = \pm \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

5. Dans le n° **2** nous avons transformé le polynôme

$$\mathrm{X} = a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4$$

en un nouveau polynôme

$$\mathrm{X}_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4) x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1,$$

et nous avons obtenu

$$\frac{dx}{\sqrt{\mathrm{X}}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{dx_1}{\sqrt{\mathrm{X}_1}}.$$

Faisons la même transformation avec le polynôme X_1. Dans ce but nous posons

$$x_1 = \frac{\alpha_4 - 9\alpha_2^2}{\alpha_3^2} + \xi_1;$$

nous aurons

$$\mathrm{X}_1 = \alpha_3^2(\xi_1^4 + 6\beta_2 \xi_1^2 + 4\beta_3 \xi_1 + \beta_4),$$

où les coefficients β_2, β_3, β_4 sont composés des coefficients du polynôme X_1 comme α_2, α_3, α_4 des coefficients du polynôme X; par conséquent,

$$\beta_2 = -\frac{2\alpha_2\alpha_3^2 + \left(\frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{4}\right)^2}{\alpha_3^4} = -\frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}.$$

Calculons maintenant, à l'aide de la formule de duplication de l'argument, $\wp(2v)$. Nous avons

$$\begin{aligned}\wp(2v) &= -2\wp v + \frac{1}{4}\left(\frac{2\wp'' v}{2\wp' v}\right)^2 \\ &= -2\wp v + \frac{1}{4}\left(\frac{12\wp^2 v - g_2}{2\wp' v}\right)^2 = \frac{32\alpha_2\alpha_3^2 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^2}{16\alpha_3^4}.\end{aligned}$$

Le calcul montre que

$$\wp(2v) = -\alpha_3^2 \beta_2.$$

Calculons maintenant $\wp'(2v)$ et β_3. Nous aurons

$$\wp'(2v) = -\wp' v + \frac{1}{4}\frac{\wp'' v}{\wp' v}\left[\frac{\wp''' v}{\wp' v} - \left(\frac{\wp'' v}{\wp' v}\right)^2\right].$$

De l'équation

$$\wp'^2(v) = 4\wp^3 v - g_2 \wp v - g_3$$

nous tirons

$$2\wp'' v = 12\wp^2 v - g_2,$$

$$\wp'''(v) = 12\wp v \wp' v,$$

par conséquent,

$$\frac{\wp'' v}{\wp' v} = \frac{12\alpha_2^2 - 3\alpha_2^2 - \alpha_4}{2\alpha_3} = \frac{9\alpha_2^2 - \alpha_4}{2\alpha_3},$$

$$\frac{\wp''' v}{\wp' v} = -12\alpha_2;$$

donc

$$\wp'(2v) = -\frac{32\alpha_3^4 + 48\alpha_2\alpha_3^2(9\alpha_2^2 - \alpha_4) + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^3}{32\alpha_3^3},$$

nous trouverons encore

$$\beta_3 = \frac{32\alpha_3^4 + 48\alpha_2\alpha_3^2(9\alpha_2^2 - \alpha_4) + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)^3}{32\alpha_3^6},$$

d'où

$$\wp'(2v) = -\alpha_3^3 \beta_3.$$

L'expression ci-dessus s'accorde pleinement avec la remarque du n° **2**. En effet, nous avons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

où

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\beta_2 x_2^2 + 4x_2.$$

Si nous prenions comme base de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en supposant

$$-\beta_2 = \wp(w),$$

nous aurions

$$\wp'(w) = \pm \beta_3.$$

Pour passer de l'argument

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}$$

à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}}$$

avec les invariants g_2, g_3, il faut multiplier $\wp(w)$ par α_3^2, $\wp'(w)$ par $(\alpha_3^2)^{\frac{3}{2}} = \alpha_3^3$; par conséquent, nous obtiendrons les résultats

$$\wp(2v) = -\alpha_3^2\beta_2,$$
$$\wp'(2v) = \pm \alpha_3^3\beta_3.$$

Le calcul a montré que

$$\wp(2v) = -\alpha_3^2\beta_2, \qquad \wp'(2v) = -\alpha_3^3\beta_3.$$

En répétant, avec le polynôme X_2, la même transformation, nous aurons, évidemment,

$$\wp(4v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2,$$
$$\wp'(4v) = \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3.$$

où les coefficients γ sont composés des coefficients du polynôme X_2, comme les coefficients β sont composés des coefficients du polynôme X_1. Plus loin nous aurons évidemment

$$\wp(8v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_2,$$
$$\wp'(8v) = -\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3,$$
$$\wp(16v) = -\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_3^2\varepsilon_2,$$
$$\wp'(16v) = \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3^3\varepsilon_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots;$$

d'où il suit que les séries

$$\begin{array}{lllll} \alpha_2, & \alpha_3^2\beta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\delta_3^2\varepsilon_2, \quad \ldots; \\ \alpha_3, & \alpha_3^3\beta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, & -\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\delta_3^3\varepsilon_3, \quad \ldots \end{array}$$

doivent être périodiques.

Donc, étant donnée l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt{a_0x^4+4a_1x^3+6a_2x^2+4a_3x+a_4}},$$

où H est indéterminé, et devant résoudre la question d'exprimabilité de l'intégrale par des logarithmes, on peut le faire de deux manières :

1° En recherchant le polynôme

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_2\xi^2 + 4\alpha_3\xi + \alpha_4,$$

nous obtiendrons

$$-\alpha_2 = \mathrm{p}(c), \qquad \alpha_3 = \mathrm{p}'c,$$

$$g_2 = 3\alpha_2^2 + \alpha_4, \qquad g_3 = \alpha_2\alpha_4 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2.$$

Au moyen des formules de duplication de l'argument, nous calculerons successivement

$$\begin{array}{llll} \mathrm{p}(2c), & \mathrm{p}(4c), & \mathrm{p}(8c), & \ldots. \\ \mathrm{p}'(2c), & \mathrm{p}'(4c), & \mathrm{p}'(8c), & \ldots. \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, on peut choisir H de telle manière que l'intégrale s'exprime par des logarithmes.

2° En composant la série des polynômes

$$\mathrm{X}, \quad \mathrm{X}_1, \quad \mathrm{X}_2, \quad \ldots.$$

nous calculons les séries des quantités

$$\begin{array}{llll} \alpha_2, & \alpha_3^2\beta_2, & \alpha_3^2\beta_3^2\gamma_2, & \ldots. \\ \alpha_3, & \alpha_3^3\beta_3, & \alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3, & \ldots. \end{array}$$

Si ces séries sont périodiques, l'intégrale s'exprime par des logarithmes. Dans ce cas il est indifférent que la période commence au terme pv ou à un autre terme quelconque.

6. Dans le n° 1, en faisant l'inversion de l'intégrale elliptique, nous avons trouvé qu'en prenant

$$-\alpha_2 = p(v, g_2, g_3)$$

nous avons

$$\alpha_3 = p'(v, g_2, g_3).$$

Mais, dans le n° 5, nous avons vu que

$$2p''v = 9\alpha_2^2 - \alpha_4 = 9p^2v - \alpha_4.$$

donc

$$\alpha_4 = 9p^2v - 2p''v.$$

D'après la transformation, nous avons changé le polynôme

$$X_1 = \alpha_3^2 x_1^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)x_1^3 - 12\alpha_2 x_1^2 + 4x_1$$

en le polynôme

$$X_2 = \beta_3^2 x_2^4 + (9\beta_2^2 - \beta_4)x_2^3 - 12\alpha_2 x_2^2 + 4x_2.$$

Par cette transformation nous avons eu

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}}.$$

Si nous prenons pour base de l'argument elliptique

$$\int \frac{dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

en posant

$$-\beta_2 = p(v_1).$$

nous aurons

$$\beta_3 = p'(v_1),$$
$$\beta_4 = 9p^2(v_1) - 2p''(v_2).$$

Si nous passons à l'argument

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

c'est-à-dire aux invariants g_2, g_3, e_1 se transforme en $2c$, β_2, β_3, β_4 se transformeront en $\alpha_3^2\beta_2$, $\alpha_3^3\beta_3$, $\alpha_3^4\beta_4$.

D'où il découle qu'après les transformations nous aurons encore une série périodique

$$\alpha_4, \quad \alpha_3^4\beta_4, \quad \alpha_2^4\beta_3^4\gamma_4, \quad \alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\delta_4, \quad \ldots.$$

7. Supposons que nous ayons

$$\alpha_3^2\beta_3^2\gamma_3^2\ldots\pi_3\rho_2 = \alpha_2,$$
$$\alpha_3^3\beta_3^3\gamma_3^3\ldots\pi_3^3\rho_3 = \alpha_3,$$
$$\alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\ldots\pi_3^4\rho_4 = \alpha_4.$$

Grâce à la série des transformations, nous trouverons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3\beta_3}\frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \cdots = \frac{1}{\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3}\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}},$$

$$\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}},$$

où

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_2\xi_n^2 + 4\rho_3\xi_n + \rho_4.$$

Supposons

$$\xi_n = \frac{\eta}{\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3},$$

alors

$$\Psi_n = \frac{1}{\alpha_3^4\beta_3^4\gamma_3^4\ldots\pi_3^4}(\eta^4 + 6\alpha_3^2\beta_3^2\ldots\pi_3\rho_2\eta^2 + 4\alpha_3^3\beta_3^3\ldots\pi_3^3\rho_3\eta + \alpha_3^4\beta_3^4\ldots\pi_3^4\rho_4)$$

ou

$$\sqrt{\Psi_n} = \frac{1}{\alpha_3^2\beta_3^2\ldots\pi_3^2}\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4},$$

d'où

$$\frac{d\xi_n}{\sqrt{\Psi_n}} = \pm\,\alpha_3\beta_3\gamma_3\ldots\pi_3\,\frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4}};$$

par conséquent,

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{d\eta}{\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4}}.$$

En posant

$$\sqrt{\eta^4 + 6\alpha_2\eta^2 + 4\alpha_3\eta + \alpha_4} = \eta^2 + 3\alpha_2 - \frac{2}{y},$$

nous aurons

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}}$$

où

$$Y = \alpha_3^2 y^4 + (9\alpha_2^2 - \alpha_4)y^3 - 12\alpha_2 y^2 + 4y,$$

c'est-à-dire que les polynômes X_1 et Y se distingueront seulement par des variables. Donc, si l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,dx}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 x + a_4}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, par une série de transformations, nous devons obtenir

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{1}{\alpha_3}\frac{dx_2}{\sqrt{X_2}} = \frac{1}{\alpha_3\beta_3}\frac{dx_3}{\sqrt{X_3}} = \cdots = \frac{1}{\alpha_3\beta_3\ldots\pi_3}\frac{dx_{n+1}}{\sqrt{X_{n+1}}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

où le polynôme final possède les mêmes coefficients que le polynôme primitif.

De l'équation d'Euler

$$\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \frac{dy}{\sqrt{Y}},$$

nous tirons

$$\int \frac{dx_1}{\sqrt{X_1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{Y}} + C.$$

En passant aux intégrales définies, nous pouvons prendre pour limites inférieures une même quantité. En effet, les variables x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}, y sont liées entre elles par $(n+1)$ équations double-

ment quadratiques auxquelles nous pouvons toujours adjoindre l'égalité

$$x_1 = y.$$

Alors nous aurons

$$\int_a^x \frac{dx}{\sqrt{X}} = \int_a^y \frac{dy}{\sqrt{Y}}.$$

Par conséquent, il est toujours possible de faire

$$C = 0,$$

alors

$$x_1 = y.$$

D'après les formules du n° 1, nous avons

$$x = -\frac{a_1}{a_0} + \xi = -\frac{a_1}{a_0} + \left(\frac{-\alpha_3 x_1}{2} - \frac{1}{2x_1}\sqrt{X_1}\right),$$

par conséquent,

$$\frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{X}} = \frac{1}{\sqrt{a_0}}\left(\frac{2a_0 H - 2a_1 - a_0\alpha_3 x_1}{2a_0} - \frac{1}{2x_1}\sqrt{X_1}\right)\frac{dx_1}{\sqrt{X_1}};$$

d'où il suit que nous avons, en général,

$$\int \frac{(x+H)\,dx}{\sqrt{X}} = -\frac{1}{2\sqrt{a_0}}\log x_1 + \int \frac{(aH + b + cx_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}},$$

où a, b, c sont des constantes déterminées.

Il est clair que nous obtiendrons la série des équations

$$\int \frac{(aH + b + cx_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}} = p_1 \log x_1 + \int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}},$$

$$\int \frac{(a_1 H + b_1 + c_1 x_2)\,dx_2}{\sqrt{X_2}} = p_2 \log x_2 + \int \frac{(a_2 H + b_2 + c_2 x_3)\,dx_3}{\sqrt{X_3}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{(a_{n-1} H + b_{n-1} + c_{n-1} x_n)\,dx_n}{\sqrt{X_n}} &= p_n \log x_n + \int \frac{(a_n H + b_n + c_n y)\,dy}{\sqrt{Y}} \\ &= p_n \log x_n + \int \frac{(a_n H + b_n + c_n x_1)\,dx_1}{\sqrt{X_1}}. \\ &= p_n \log x_n + \frac{c_n}{c}\int \frac{\frac{a_n c}{c_n} H + \frac{b_n c}{c_n} + c x_1}{\sqrt{X_1}}\,dx_1.\end{aligned}$$

En posant

$$aH + b + cx_1 = \frac{a_n c}{c_n} H + \frac{b_n c}{c_n} + cx_1,$$

nous trouverons l'indéterminée H et nous obtiendrons des équations, en nombre suffisant, pour évaluer l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt{X}}.$$

Nous ne nous arrêterons pas à examiner le cas où dans les séries du n° 5 la période ne commence pas dès le premier terme, car ce cas est clair par lui-même.

Il faut examiner encore un cas, où

$$v = -\frac{2\tilde{\omega}}{2^k}.$$

Dans ce cas, en doublant l'argument $(k-1)$ fois, nous aurons

$$2^{k-1} v = -\tilde{\omega},$$

et comme

$$p'(\tilde{\omega}) = 0$$

dans la série des nombres

$$\alpha_3, \quad -\alpha_3^3 \beta_3, \quad \alpha_3^3 \beta_3^3 \gamma_3, \quad \ldots.$$

il s'en trouvera un égal à zéro.

Donc, si dans la série des polynômes

$$\Psi = \xi^4 + 6\alpha_2 \xi^2 + 4\alpha_3 \xi + \alpha_4,$$
$$\Psi_1 = \xi_1^4 + 6\beta_2 \xi_1^2 + 4\beta_3 \xi_1 + \beta_4,$$

le dernier est de la forme

$$\Psi_n = \xi_n^4 + 6\rho_3 \xi_n^2 + \rho_4,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt{a_0 x^4 + 4a_1 x^3 + 6a_2 x^2 + 4a_3 + a_4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes;

PAR M. H. POINCARÉ.

DÉFINITION.

Nous dirons qu'un système de fonctions d'une variable u

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

possède un *théorème d'addition* quand

$$\varphi_1(u+v), \quad \varphi_2(u+v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u+v).$$

pourront s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

et

$$\varphi_1(v), \quad \varphi_2(v), \quad \ldots, \quad \varphi_n(v).$$

Soit maintenant m un nombre quelconque réel ou imaginaire, mais tel que

$$|m| > 1.$$

Nous dirons que le système

$$(1) \qquad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

admet un *théorème de multiplication*, si

$$\varphi_1(mu), \quad \varphi_2(mu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(mu)$$

peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Il est clair, d'après ces définitions, que si le système (1) possède un théorème d'addition, et si p est un entier quelconque,

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \ldots, \quad \varphi_n(pu)$$

s'expriment rationnellement par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Tout système qui possède un théorème d'addition possédera donc également une infinité de théorèmes de multiplication.

Les mêmes définitions peuvent facilement s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Par exemple, le système

$$\sin u, \quad \cos u$$

ou le système

$$\operatorname{sn} u, \quad \operatorname{cn} u, \quad \operatorname{dn} u,$$

possède un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication.

Considérons maintenant un système complet de fonctions abéliennes quadruplement périodiques de deux variables

$$F_1(u, u'), \quad F_2(u, u'), \quad \ldots, \quad F_n(u, u');$$

ce système admettra un théorème d'addition, c'est-à-dire que les

$$F_i(u + v, u' + v'),$$

s'exprimeront rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, u') \quad \text{et des} \quad F_i(v, v').$$

Si nous faisons $u' = v' = 0$, nous aurons un système de fonctions d'une seule variable

$$F_1(u, 0), \quad F_2(u, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u, 0),$$

qui admettra un théorème d'addition et une infinité de théorèmes de multiplication; car

$$F_1(u + v, 0), \quad F_2(u + v, 0), \quad \ldots, \quad F_n(u + v, 0)$$

s'expriment rationnellement à l'aide des

$$F_i(u, 0) \quad \text{et des} \quad F_i(v, 0).$$

Il y a aussi des fonctions qui admettent un théorème de multiplication sans admettre un théorème d'addition.

Considérons en effet la fontion $\Theta(u)$, et soit

$$\varphi_1(u) = \Theta^2\left(u - \frac{\omega'}{2}\right), \qquad \varphi_2(u) = \Theta(u - \alpha)\,\Theta(u + \alpha - \omega'),$$

α étant une constante quelconque.

Soit ensuite p un entier quelconque, et envisageons les expressions suivantes

$$\varphi_1(pu), \quad \varphi_2(pu), \quad \varphi_1^q(u)\,\varphi_2^{p^2-q}(u),$$

q étant un autre entier plus petit que p^2.

Ces diverses expressions admettront la période ω et seront multipliées par un certain facteur exponentiel quand u se changera en $u + \omega'$.

Soit

$$\Theta\left(u + \frac{\omega'}{2}\right) = e^{au}\,\Theta\left(u - \frac{\omega'}{2}\right);$$

il vient

$$\varphi_1^q(u + \omega')\,\varphi_2^{p^2-q}(u + \omega') = e^{2p^2 au}\,\varphi_1^q(u)\,\varphi_2^{p^2-q}(u).$$

Cherchons le facteur exponentiel relatif à

$$\varphi_1(pu) \quad \text{et à} \quad \varphi_2(pu).$$

Il vient

$$\varphi_1[p(u+\omega')] = \varphi_1(pu+p\omega') = e^{2p^2au}\, e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'}\, \varphi_1(pu).$$

Et de même

$$\varphi_2[p(u+p\omega')] = e^{2p^2au}\, e^{\frac{p(p-1)}{2}a\omega'}\, \varphi_2(pu).$$

Il sort de là que

$$\varphi_1(pu)\, e^{-\frac{p(p-1)}{2}au} \quad \text{et} \quad \varphi_2(pu)\, e^{-\frac{p(p-1)}{2}au}$$

ont même multiplicateur que les fonctions

$$\varphi_1^q(u)\, \varphi_2^{p^2-q}(u)$$

et par conséquent s'expriment linéairement à l'aide de ces fonctions.

Donc $\varphi_1(pu)$ et $\varphi_2(pu)$ sont des fonctions linéaires des diverses quantités $e^{p(p-1)\frac{au}{2}}\, \varphi_1^q(u)\, \varphi_2^{p^2-q}(u)$. Ce sont donc des fonctions entières rationnelles et homogènes de

$$e^{\frac{au}{2}}, \quad \varphi_1(u) \quad \text{et} \quad \varphi_2(u).$$

D'autre part $e^{\frac{apu}{2}}$ est également une fonction entière de $e^{\frac{au}{2}}$. Donc le système

$$e^{\frac{au}{2}}, \quad \varphi_1(u), \quad \varphi_2(u)$$

admet une infinité de théorèmes de multiplication; je dis une infinité, car on peut donner à p telle valeur entière que l'on veut.

Je me propose de rechercher quelles sont les fonctions qui admettent un théorème de multiplication et qui ne présentent pas pour $u = 0$ de point singulier essentiel.

J'exclus ainsi de très nombreuses catégories de transcendantes, par

exemple celle-ci. Soit la fonction $\varphi(u)$ qui se rattache aux fonctions Θ

$$\varphi(u) = \Sigma q^{m^2} u^{2m} \qquad (m \text{ variant de } -\infty \text{ à } +\infty),$$

où

$$|q| < 1.$$

Il vient

$$\varphi\left(\frac{u}{q}\right) = \frac{u^2}{q}\,\varphi(u),$$

ce qui montre que le système

$$u, \quad \varphi(u),$$

admet un théorème de multiplication. Mais le point $u = 0$ est pour $\varphi(u)$ un point singulier essentiel.

Considérons donc un système

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

admettant un théorème de multiplication et tel qu'aucune des fonctions du système n'ait un point singulier essentiel en $u = 0$.

Je puis toujours supposer que

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Si φ_i est fini, je pourrai toujours poser

$$\varphi'_i(u) = \varphi_i(u) - \varphi_i(0),$$

et si $\varphi_i(0)$ est infini, je poserai

$$\varphi'_i(u) = \frac{1}{\varphi_i(u)}.$$

Il est clair alors qu'on aura

$$\varphi'_i(0) = \varphi'_2(0) = \ldots = \varphi'_n(0) = 0.$$

et que le système $\varphi'_i(u)$ admettra comme le système $\varphi_i(u)$ un théorème de multiplication.

Je ferai une hypothèse de plus; je supposerai d'abord que le développement des fonctions $\varphi_i(u)$ suivant les puissances croissantes de u commence, pour l'une au moins de ces fonctions, par un terme en u.

Si de pareilles fonctions existent, elles sont nécessairement uniformes.

En effet, comme le point $u = 0$ n'est pas un point singulier essentiel, on peut trouver une quantité positive ρ, telle qu'à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho$$

les fonctions $\varphi_i(u)$ restent uniformes.

Mais les fonctions $\varphi_i(mu)$ s'expriment rationnellement à l'aide des fonctions $\varphi_i(u)$; si donc $|u| < \rho$, les fonctions $\varphi_i(mu)$ sont encore uniformes.

Donc les fonctions $\varphi_i(u)$ sont uniformes, pourvu que

$$|u| < |m|\rho.$$

On démontrerait de même successivement qu'elles sont uniformes, pourvu que

$$|u| < |m^2|\rho, \quad |u| < |m^3|\rho, \quad \ldots, \quad |u| < |m^p|\rho,$$

c'est-à-dire pour toutes les valeurs de u.

Ce raisonnement peut servir à démontrer que les fonctions elliptiques et abéliennes sont uniformes. C'est même la seule démonstration rigoureuse qui ait été proposée jusqu'ici, à l'exception des démonstrations indirectes où l'on commence par définir la fonction Θ. La démonstration de Riemann dans sa théorie des fonctions abéliennes est une de ces démonstrations indirectes; la démonstration de Clebsch et Gordan (*Theorie der Abelschen Functionen*, 8e Partie) n'est pas rigoureuse. Quant aux démonstrations d'Abel et de Jacobi, elles sont en réalité fondées sur l'existence d'un théorème de multiplication.

Il peut se faire que le théorème de multiplication soit tel que les

$\varphi_i(mu)$ s'expriment en fonction non seulement rationnelles, mais encore *entières* des $\varphi_i(u)$.

Dans ce cas, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

En effet, si les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = \rho,$$

il en est de même, des fonctions $\varphi_i(mu)$, de sorte que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont holomorphes à l'intérieur du cercle

$$|u| = |m|\rho.$$

Par un raisonnement tout pareil à celui qui précède, on démontrerait qu'elles sont holomorphes dans tout le plan.

FORME DES ÉQUATIONS FONDAMENTALES.

Nous appellerons *équations fondamentales* les équations qui définissent le théorème de multiplication et qui peuvent s'écrire

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \varphi_1(mu) = R_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \varphi_2(mu) = R_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_n(mu) = R_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)], \end{array}\right.$$

$R_1, R_2, \ldots, R_n$ étant des fonctions rationnelles.

Je dis d'abord que l'on a

$$R_i(0, 0, \ldots, 0) = 0.$$

En effet, par hypothèse,

$$\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \ldots = \varphi_n(0) = 0.$$

Si donc on fait dans les équations (2) $u = 0$, le premier membre s'annule et le second se réduit à $R_i(0, 0, \ldots, 0)$; donc la fonction R_i s'annule quand tous ses arguments s'annulent. C. Q. F. D.

Les fonctions rationnelles R_i doivent satisfaire encore à une autre condition.

Posons

$$\frac{d\varphi_i(u)}{du} = A_i, \qquad \frac{dR_i}{d[\varphi_k(u)]} = B_{ik},$$

pour $u = 0$.

Si, dans les équations (2), on substitue le développement des fonctions $\varphi_0(u)$ suivant les puissances croissantes de u, puis qu'on égale dans les deux membres les coefficients de u, il viendra

$$mA_i = B_{i,1}A_1 + B_{i,2} + \ldots + B_{i,n}A_n, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après une hypothèse que nous avons faite plus haut, tous les A_i ne sont pas nuls à la fois. Si donc nous posons

$$F(S) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S \end{vmatrix},$$

on devra avoir

$$F(m) = 0.$$

En d'autres termes, l'équation en S, $F(S) = 0$, a une racine égale à m.

Posons

$$\varphi_i'(u) = \alpha_{i,1}\varphi_1(u) + \alpha_{i,2}\varphi_2(u) + \ldots + \alpha_{i,n}\varphi_n(u), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\alpha_{i,k}$ étant des constantes.

On peut se servir de ce changement linéaire de variables pour ramener les fonctions R à une expression plus simple.

Voici comment nous nous servirons de cette faculté : je me contente d'indiquer ici le résultat et j'omets la démonstration, que le lecteur retrouvera sans peine, car elle est fondée sur les principes les plus simples de la théorie des substitutions linéaires.

Si l'équation en S a toutes ses racines distinctes, on pourra supposer

que, après le changement de variables, on a

$$B_{i,k} = 0 \quad (i \gtrless k), \qquad B_{i,i} = S_i;$$

$S_1, S_2, \ldots, S_n$ sont alors les diverses racines de l'équation en S, et l'on aura, par exemple,

$$S_1 = m.$$

Supposons maintenant que toutes les racines ne soient pas distinctes. On pourra encore supposer qu'après le changement de variables

$$B_{i,i} = S_i$$

et que les $B_{i,k}$ sont nuls si $i < k$ ou si, i étant plus grand que k, S_i est différent de S_k. Quant aux $B_{i,k}$, pour lesquels on a

$$i > k, \qquad S_i = S_k,$$

nous n'en pouvons rien dire.

Si, en particulier, l'équation en S a toutes ses racines égales à m, il vient

$$B_{i,k} = 0 \quad (i < k), \qquad B_{i,i} = m.$$

FORMATION DES SÉRIES FONDAMENTALES.

Cherchons à satisfaire aux équations (2) par des séries de la forme suivante

$$(3) \qquad \varphi_i(u) = A_i^1 u + A_i^2 u^2 + A_i^3 u^3 + \ldots,$$

où les A_i^k sont des coefficients constants, et tout d'abord cherchons à y satisfaire formellement. Pour cela nous n'avons qu'à appliquer la méthode des coefficients indéterminés.

Substituons les séries (3) dans les équations (2) et égalons dans les deux membres les coefficients de u^p, il viendra

$$(4) \qquad m^p A_i^p = B_{i,1} A_1^p + B_{i,2} A_2^p + \ldots + B_{i,n} A_n^p + C_i^p$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n);$$

les C_i^p représentent un ensemble de termes dépendant des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots \quad A_i^{p-1},$$

mais ne dépendant pas des A_i^p ni des A_i^q, où $q > p$.

On peut supposer qu'on ait déterminé par un calcul préalable les

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad \text{et les} \quad A_i^{p-1}.$$

On aura alors, pour calculer les A_i^p, le système des équations linéaires (4). Ce système pourra toujours être résolu, pourvu que son déterminant ne soit pas nul. Or ce déterminant est égal à $F(m^p)$.

Si aucun des déterminants $F(m^2)$, $F(m^3)$, ..., n'est nul, on pourra alors calculer de proche en proche les coefficients des séries (3), pourvu qu'on ait commencé par calculer les A_i^1; or les A_i^1 nous sont donnés par les équations

$$(4\,bis) \qquad m A_i^1 = B_{i,1} A_1^1 + \ldots + B_{i,n} A_n^1,$$

qui ne diffèrent pas de celles qui ont été envisagées dans le paragraphe précédent : or ce système (4 *bis*) peut toujours être résolu si $F(m)$ est nul.

Si donc on a

$$F(m) = 0, \qquad F(m^2) \gtrless 0, \qquad F(m^3) \gtrless 0, \qquad \ldots, \qquad F(m^p) \gtrless 0,$$

on pourra toujours trouver des séries de la forme (3), *que nous appellerons séries fondamentales et qui satisferont formellement aux équations* (2).

Il nous reste à chercher combien ces séries (3) contiennent de constantes arbitraires.

J'observe d'abord que, si $F(m^p)$ n'est pas nul, le système (4) ne comporte qu'une solution unique.

Pour savoir combien les séries fondamentales contiennent de constantes arbitraires, il nous suffit donc de savoir combien le système (4 *bis*) comporte de solutions linéairement indépendantes.

Je suppose que l'équation

$$F(S) = 0$$

admette q racines égales à m.

On aura alors

$$B_{1,1} = B_{2,2} = \ldots = B_{q,q} = m, \qquad B_{i,i} < m \qquad (\text{si } i > q).$$

D'autre part,

$$B_{i,k} = 0,$$

si $i < k$ ou bien encore si $i > q$, $k \leqq q$.

Dans ce cas les $n - q$ dernières équations (4 *bis*) ne contiennent que les $n - q$ variables

$$A'_{q+1}, \quad A'_{q+2}, \quad \ldots, \quad A'_n,$$

et leur déterminant par rapport à ces $n - q$ variables est égal à

$$(B_{q+1,q+1} - m)(B_{q+2,q+2} - m)\ldots(B_{n,n} - m) \gtrless 0.$$

On tirera donc de ces équations

$$A'_{q+1} = A'_{q+2} = \ldots = A'_n = 0,$$

ce qui montre que les équations (4 *bis*) ne pourront en aucun cas comporter plus de q solutions linéairement indépendantes.

Les q premières équations (3 *bis*) ne contiennent que les $q - 1$ variables

$$A'_1, \quad A'_2, \quad \ldots, \quad A'_{q-1}.$$

J'ajouterai même que la première de ces équations se réduit à une identité; si nous la laissons de côté, il nous restera $q - 1$ équations et $q - 1$ variables, et leur déterminant sera égal à

$$\Delta = B_{2,1} B_{3,2} B_{4,3} \ldots B_{q,q-1}.$$

Si ce déterminant n'est pas nul, on aura

$$A_1^1 = A_2^1 = \ldots = A_{q-1}^1 = 0,$$

de sorte qu'il n'y aura plus qu'un coefficient arbitraire, à savoir A_q^1.

Supposons maintenant que ce déterminant soit nul; dans ce cas, il est aisé de voir que le système (4 *bis*) comporte au moins deux solutions linéairement indépendantes.

Appelons (5) le système d'équations linéaires formé par les

$$2^e, \quad 3^e, \quad 4^e, \quad \ldots, \quad q^e$$

équations (4 *bis*) et où les variables sont

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_{q-1}^1.$$

Considérons le déterminant Δ de ce système (5). Si Δ est nul, ainsi que ses mineurs des $h-2$ premiers ordres, le système (5) aura $h-1$ solutions linéairement indépendantes; et, comme A_q^1 reste arbitraire, le système (4 *bis*) en admettra h.

Donc les séries (3) contiendront des constantes arbitraires.

Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ces constantes. On voit que

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1$$

seront des fonctions linéaires et homogènes des β_i.

Les A_i^p seront des polynômes entiers par rapport aux β. Supposons en effet que cela soit vrai des A_i^1, des $A_i^2, \ldots$, des A_i^{p-1}, cela sera vrai également des C_i^p et par conséquent aussi des A_i^p.

Si le système

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

admet un théorème de multiplication, il en sera de même évidemment du système

$$\varphi_1(\gamma u), \quad \gamma_2(\gamma u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(\gamma u),$$

où γ est une constante quelconque.

Si donc dans les séries (3) on remplace u par γu, ces séries ne cesseront pas de satisfaire aux équations (2); changer u en γu, cela revient à changer les valeurs des constantes β.

Or changer u en γu c'est changer A_i^1 en γA_i^1 et, par conséquent,

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_h$$

en

$$\gamma\beta_1, \quad \gamma\beta_2, \quad \ldots, \quad \gamma\beta_h.$$

Quand on change u en γu, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc, quand on change β_i en $\gamma\beta_i$, A_i^p se change en $\gamma^p A_i^p$.

Donc A_i^p est un polynôme entier *homogène et de degré* p par rapport aux β.

Donc les séries (3) sont ordonnées suivant les puissances croissantes de

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots \quad \text{et} \quad \beta_h u.$$

Si nous posons

$$\beta_i u = u_i,$$

nous aurons un système de n fonctions

$$\varphi_1, \quad \varphi_2, \quad \ldots, \quad \varphi_n$$

dépendant de h variables

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_h$$

et admettant un théorème de multiplication; car on aura

$$\begin{aligned}&\varphi_i(mu_1, mu_2, \ldots, mu_h)\\ &\quad = R_i[\varphi_1(u_1, u_2, \ldots, u_h), \varphi_2(u_1, u_2, \ldots, u_h), \ldots, \varphi_n(u_1, u_2, \ldots, u_h)]\\ &\qquad (i = 1, 2, \ldots, n).\end{aligned}$$

CAS PARTICULIERS.

Supposons, en particulier, que l'on ait

$$R_i = m\varphi_i(u) + \frac{MS^2}{1 - \alpha S};$$

M et α sont deux constantes et l'on a posé pour abréger

$$S(u) = \varphi_1(u) + \varphi_2(u) + \ldots + \varphi_n(u).$$

J'observe d'abord que le déterminant des équations (4 *bis*) a tous ses éléments nuls, ce qui me permet de conclure que les séries (3) contiennent n constantes arbitraires; je puis donc me donner arbitrairement les n coefficients

$$A'_1, \quad A'_2, \quad \ldots, \quad A'_n.$$

Je remarque ensuite que l'on a

$$\varphi_i(mu) - \varphi_k(mu) = m[\varphi_i(u) - \varphi_k(u)];$$

d'où

$$\varphi_i(u) - \varphi_k(u) = (A'_i - A'_k)u.$$

Nous avons, d'autre part,

$$S(mu) = mS(u) + \frac{nMS^2(u)}{1 - \alpha S(u)}.$$

Si l'on suppose, en particulier,

$$M = \frac{1}{n} m\alpha,$$

il vient

$$S(mu) = \frac{mS(u)}{1 - \alpha S(u)}$$

ou

$$\frac{S(mu)}{m - 1 + \alpha S(mu)} = \frac{mS(u)}{m - 1 + \alpha S(u)};$$

d'où

$$\frac{S(u)}{m - 1 + \alpha S(u)} = \frac{\Sigma}{m - 1} u,$$

en posant, pour abréger,

$$\Sigma = A'_1 + A'_2 + \ldots + A'_n.$$

Il vient donc finalement

$$S(u) = \frac{u\Sigma}{1 - u\dfrac{\alpha\Sigma}{m - 1}}.$$

Ainsi, dans le cas de $M = \frac{1}{n} m\alpha$, les fonctions $\varphi_i(u)$ existent et sont rationnelles en u.

Donc, dans ce cas particulier, les séries (3) *convergent.*

Je vais examiner plus particulièrement le cas où m et α sont réels positifs et où

$$A_1^1, \quad A_2^1, \quad \ldots, \quad A_n^1$$

sont réels positifs.

Je dis que dans ce cas tous les coefficients des séries (3) sont réels positifs.

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1}.$$

je dis que cela sera vrai des A_i^p.

En effet, les équations (4) s'écrivent

$$(m^p - m) A_i^p = C_i^p.$$

C_i^p est manifestement un polynôme entier à coefficients entiers positifs par rapport à m, à α, aux $A_i^1, A_i^2, \ldots, A_i^{p-1}$. Donc C_i^p est réel et positif.

D'autre part $m^p - m$ est réel positif.

Donc il en est de même de A_i^p. C. Q. F. D.

CONVERGENCE DES SÉRIES FONDAMENTALES.

Reprenons les équations fondamentales

$$(2) \qquad \varphi_i(mu) = R_i[\varphi_k(u)],$$

et les séries fondamentales

$$(3) \qquad \varphi_i(u) = \Sigma A_i^p u^p.$$

Je vais chercher à former d'autres équations fondamentales

$$(2') \qquad \varphi'_i(m'u) = R'_i[\varphi'_k(u)],$$

qui seront satisfaites formellement par les séries fondamentales

$$(3') \qquad \varphi'_i(u) = \Sigma A'^p_i u^p.$$

Je vais chercher à m'arranger de façon que les équations (2') soient de la forme particulière qui a été intégrée dans le paragraphe précédent et que chacun des coefficients A'^p_i soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant A^p_i.

La convergence des séries (3') et par conséquent celle des séries (3) sera ainsi établie.

J'observe d'abord que l'on peut toujours trouver deux nombres réels et positifs, M et α, tels que, si l'on considère le développement des deux fonctions

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) - B_{i,1}x_1 - B_{i,2}x_2 - \ldots - B_{i,n}x_n$$

et

$$\frac{M(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)^2}{1 - \alpha(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)},$$

suivant les puissances croissantes de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tout terme du second développement soit réel positif et plus grand en valeur absolue que le terme correspondant du premier.

Il importe d'observer que ces deux développements ne contiennent ni terme indépendant des x, ni termes du premier degré par rapport aux x_i.

Soient q et β deux nombres positifs que je me réserve de déterminer plus complètement dans la suite. Je prendrai $m' = q$.

Posons, pour abréger,

$$S = \varphi'_1(u) + \varphi'_2(u) + \ldots + \varphi'_n(u).$$

Nous prendrons

$$R'_i = q\varphi'_i(u) + \frac{\frac{1}{n} q\beta S^2}{1 - \beta S},$$

de sorte que les équations (2′) s'écriront

$$(2') \qquad \varphi'_i(qu) = q\varphi'_i(u) + \frac{\frac{1}{n} q\beta S^2}{1 - \beta S}.$$

Pour achever de déterminer les séries (3′), il faut encore se donner les n coefficients

$$A'^1_1, \quad A'^1_2, \quad \ldots, \quad A'^1_n.$$

Nous prendrons

$$A'^1_1 = A'^1_2 = \ldots = A'^1_n.$$

De plus A'^1_1 devra être réel positif et plus grand en valeur absolue que $A^1_1, A^1_2, \ldots, A^1_n$.

Il résulte de là que l'on aura également

$$\varphi'_i(u) = \varphi'_k(u), \qquad A'^p_1 = A'^p_2 = \ldots = A'^p_n.$$

De plus toutes ces quantités A'^p_i seront réelles et positives. Elles satisferont à des équations analogues aux équations (4) et qui s'écriront

$$(4') \qquad (q^p - q) A'^p_i = C'^p_i.$$

C'^p_i sera un polynôme entier à coefficients réels et positifs par rapport aux quantités

$$A'^1_i, \quad A'^2_i, \quad \ldots, \quad A'^{p-1}_i.$$

et l'on aura d'ailleurs

$$C'^p_1 = C'^p_2 = \ldots = C'^p_n.$$

Je supposerai

$$(6) \qquad q > 1, \qquad \frac{1}{n} q\beta > M, \qquad \beta > \alpha.$$

Dans ce cas, si l'on envisage les deux fonctions

$$R_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad R'_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

qu'on les développe suivant les puissances des x, chacun des termes de degré deux ou de degré supérieur à deux du développement de R'_i aura

son coefficient plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de R_i. (Je répète que ce que je dis là ne s'applique qu'aux termes de degré au moins égal à 2 et ne s'applique pas aux termes du premier degré.) On peut conclure de là que la quantité appelée plus haut C_i^p jouit de la propriété suivante.

Nous avons vu que $C_i'^p$ est un polynôme entier par rapport aux $A_i^h (h \leqq p-1)$ et que C_i^p est de même un polynôme entier par rapport aux $A_i^h (h \leqq p-1)$.

Eh bien, chaque coefficient du polynôme $C_i'^p$ est plus grand en valeur absolue que le coefficient correspondant de C_i^p.

Cela posé, écrivons les équations (4)

$$(4) \qquad m^p A_i^p - \sum_{h=1}^{h=n} B_{i,h} A_h^p = C_i^p.$$

Le déterminant de ces équations est égal à $F(m^p)$: appelons

$$F_{i,k}(m^p)$$

les divers mineurs du premier ordre de ce déterminant.

On tirera des équations (4) les équations suivantes

$$F(m^p) A_i^p = F_{i,1}(m^p) C_1^p + F_{i,2}(m^p) C_2^p + \ldots + F_{i,n}(m^p) C_n^p.$$

Par hypothèse, $F(m^p)$ ne s'annule pour aucune valeur de p plus grande que 1. D'autre part,

$$\frac{F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)}$$

considérée comme fonction de m^p est une fonction rationnelle dont le numérateur est un polynôme de degré $n-1$ et le dénominateur un polynôme de degré n. Donc, quand p tend vers l'infini, cette fonction rationnelle tend vers 0, et $\frac{m^p F_{i,k}}{F}$ tend vers une limite finie.

On peut donc trouver un nombre positif H, tel que

$$\left| \frac{m^p F_{i,k}(m^p)}{F(m^p)} \right| < H,$$

et cela pour toutes les valeurs de i, k et p, sauf pour $p = 1$.

On a alors

$$(7) \qquad |m|^p |A_i^p| < H[|C_1^p| + |C_2^p| + \ldots + |C_n^p|].$$

Je supposerai que l'on choisisse q de telle sorte que

$$(8) \qquad q^p - q < \frac{|m|^p}{nH}.$$

Il est toujours possible de choisir q et β de façon à satisfaire aux conditions (6) et (8).

Soit q_0 un nombre compris entre 1 et $|m|$.

Soit

$$p_0 = \frac{\log(nH)}{\log|m| - \log q_0}.$$

L'équation en q

$$q^{p_0} - q - \frac{|m|}{nH} = 0$$

admet une racine supérieure à 1. Comme elle n'a qu'une variation, elle n'en admet qu'une. Il est vrai que p_0 n'est pas en général un entier, mais Laguerre a montré que la règle de Descartes s'applique encore quand les exposants ne sont pas entiers.

D'ailleurs il est aisé de voir que, pour $q > 1$,

$$q^{p_0} - q$$

est constamment croissant.

Soit donc q_1 cette racine plus grande que 1.

Je dis que, si l'on fait

$$1 < q < q_0 < |m|, \qquad 1 < q < q_1,$$

l'inégalité (8) sera satisfaite tant pour les exposants p supérieurs à p_0 que pour les exposants p inférieurs à p_0.

En effet, pour $p > p_0$, on a

$$\frac{q^p - q}{|m|^p} < \frac{q^p}{|m|^p} < \left(\frac{q_0}{|m|}\right)^p < \left(\frac{q_0}{|m|}\right)^{p_0} = \frac{1}{nH},$$

et pour $p < p_0$, on a

$$q^p - q < q_1^p - q_1 < q_1^{p_0} - q_1 = \frac{|m|}{nH} < \frac{|m^p|}{nH}.$$

C. Q. F. D.

Une fois q déterminé, il reste, pour satisfaire aux inégalités (6), à faire

$$\beta > \frac{nM}{q}, \qquad \beta > \alpha.$$

Cela posé, je dis que

$$|A_i^p| < A_i'^p.$$

En effet, supposons que cela soit vrai des

$$A_i^1, \quad A_i^2, \quad \ldots, \quad A_i^{p-1}.$$

je dis que cela sera vrai des A_i^p.

En effet, les coefficients du polynôme $C_i'^p$ étant plus grands que ceux du polynôme C_i^p, on aura

$$|C_i^p| < C_i'^p.$$

d'où

$$|C_1^p + C_2^p + \ldots + C_n^p| < C_1'^p + C_2'^p + \ldots + C_n'^p = n C_i'^p.$$

puisque

$$C_1'^p = C_2'^p = \ldots = C_n'^p.$$

L'inégalité (7) devient alors

$$|A_i^p| < \frac{nH}{|m|^p} C_i'^p.$$

D'autre part, l'équation (4') donne

$$A_i'^p = \frac{C_i'^p}{q^p - q}$$

ou, en tenant compte de (8),

$$(9) \qquad |A_i^p| < A_i'^p. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

D'après le paragraphe précédent, les séries (3′) convergent et, si l'on a égard à l'inégalité (9), on verra que les séries (3) convergent également. Elles définissent donc des transcendantes qui jouissent d'un théorème de multiplication et *qui par conséquent sont uniformes.*

Donc il existe des transcendantes uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que $F(m)$ (déterminant des équations 4 *bis*) *soit nul et que* $F(m^p)$ *ne soit pas nul pour* $p > 1$.

Si le déterminant des équations (4 *bis*) est nul, ainsi que ses mineurs des $h-1$ premiers ordres, ces transcendantes contiendront h constantes arbitraires $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_h$.

Elles en contiendront donc n, si tous les éléments du déterminant sont nuls, c'est-à-dire si

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

FONCTIONS ENTIÈRES.

Nous avons vu que, si les fonctions R_i se réduisent à des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont des transcendantes entières.

Si, au contraire, les fonctions R_i ne sont pas des polynômes entiers, les fonctions $\varphi_i(u)$ sont méromorphes, mais non holomorphes dans tout le plan.

Mais, dans ce cas, on peut regarder chacune des fonctions $\varphi_i(u)$ comme le quotient de deux fonctions entières qui admettent un théorème de multiplication.

Supposons, en effet, que les fonctions R_i soient des fractions rationnelles et réduisons ces fractions au même dénominateur. Posons

$$R_1 = \frac{P_1}{P_{n+1}}, \qquad R_2 = \frac{P_2}{P_{n+1}}, \qquad \ldots \qquad R_n = \frac{P_n}{P_{n+1}},$$

$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}$ sont des polynômes entiers par rapport à $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$; les n premiers s'annulent quand $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots,$

$\varphi_n(u)$ s'annulent, et il est permis de supposer que P_{n+1} se réduit à 1 pour

$$\varphi_1(u) = \varphi_2(u) = \ldots = \varphi_n(u) = 0.$$

Soit q le plus grand des degrés des polynômes $P_1, P_2, \ldots, P_{n+1}$.

Dans nos polynômes remplaçons $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ par $\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}$ et multiplions-les ensuite par z_{n+1}^q; il viendra

$$z_{n+1}^q P_k\left(\frac{z_1}{z_{n+1}}, \frac{z_2}{z_{n+1}}, \ldots, \frac{z_n}{z_{n+1}}\right) = Q_k(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}).$$

Q_k sera un polynôme homogène de degré q en $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$ qui pourra contenir en facteur une puissance de z_{n+1} si le degré de P_k est inférieur à q.

Posons maintenant

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les équations (2) deviendront

$$(2) \qquad \frac{\psi_i(mu)}{1 + \psi_{n+1}(mu)} = \frac{Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)]}{Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)]}.$$

Nous pouvons les remplacer par les suivantes :

$$(10) \quad \begin{cases} \psi_i(mu) = Q_i[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)] \\ \qquad\qquad (i = 1, 2, \ldots, n), \\ \psi_{n+1}(mu) = Q_{n+1}[\psi_1(u), \psi_2(u), \ldots, \psi_n(u), 1 + \psi_{n+1}(u)] - 1. \end{cases}$$

S'il existe des fonctions $\psi_i(u)$ qui admettent le théorème de multiplication exprimé par les équations (10), les fonctions

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)}$$

admettront le théorème de multiplication exprimé par les équations (2).

Or nous avons vu qu'il existe des fonctions uniformes qui admettent un théorème de multiplication quelconque, pourvu que certaines conditions très simples soient satisfaites.

Voyons si ces conditions sont remplies par les équations (10).

J'observe d'abord que

$$Q_1, \quad Q_2, \quad \ldots \quad Q_n \quad \text{et} \quad Q_{n+1} - 1,$$

s'annulent pour

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = \psi_{n+1} = 0.$$

Développons alors les seconds membres des équations (10) suivant les puissances croissantes des ψ et examinons les termes du premier degré.

De même que nous avons appelé plus haut $B_{i,k}$ le coefficient de φ_k dans le développement de R_i, nous appellerons $B'_{i,k}$ le coefficient de ψ_k dans le développement de Q_i. On aura manifestement

$$\begin{aligned} B'_{ik} &= B_{i,k} && (i, k = 1, 2, \ldots, n), \\ B'_{ik} &= 0 && (i = 1, 2, \ldots, n;\ k = n+1), \\ B'_{n+1,n+1} &= q. \end{aligned}$$

Nous avons posé plus haut

$$F(S) = \begin{vmatrix} B_{1,1} - S & B_{1,2} & \ldots & B_{1,n} \\ B_{2,1} & B_{2,2} - S & \ldots & B_{2,n} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B_{n,1} & B_{n,2} & \ldots & B_{n,n} - S \end{vmatrix}.$$

Nous poserons de même

$$F'(S) = \begin{vmatrix} B'_{11} - S & B'_{1,2} & \ldots & B'_{1,n+1} \\ B'_{2,1} & B'_{2,2} - S & \ldots & B'_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ B'_{n+1,1} & \ldots\ldots & \ldots & B'_{n+1,n+1} - S \end{vmatrix}.$$

Les conditions qui doivent être remplies pour que le théorème de multiplication (10) soit possible sont les suivantes

$$(11) \qquad F'(m) = 0, \qquad F'(m^p) \gtrless 0 \qquad (p > 1).$$

Or on a

$$F'(S) = F(S)(q - S).$$

De plus, les conditions fondamentales étant supposées remplies pour les équations (2), on aura

$$F(m) = 0, \qquad F(m^p) \gtrless 0.$$

Les conditions (11) seront donc remplies pourvu que q ne soit pas égal à une puissance entière de m (la première puissance exceptée).

Les fonctions $\psi_i(u)$ existent donc; ce sont des fonctions entières, et l'on a

$$\varphi_i(u) = \frac{\psi_i(u)}{1 + \psi_{n+1}(u)},$$

ce qui montre que les fonctions $\varphi_i(u)$ sont bien égales au quotient de deux transcendantes entières admettant un théorème de multiplication.

C'est ainsi que les fonctions elliptiques, par exemple, sont égales au quotient de deux fonctions Θ, qui admettent, comme nous l'avons vu, un théorème de multiplication.

Il n'y a de difficulté que si q est une puissance entière de m; mais nous pouvons prendre pour q soit le plus grand des degrés des polynômes P_k, soit tout nombre entier plus grand; nous pouvons donc toujours éviter que q soit une puissance entière de m.

THÉORÈMES CRÉMONIENS.

Un cas particulier digne d'intérêt est celui où le théorème de multiplication défini par les équations (2) est *crémonien*. Voici ce que j'entends par là :

Considérons les équations (2)

$$\varphi_i(mu) = R_i[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)].$$

Résolvons ce système d'équations par rapport à

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots \quad \varphi_n(u),$$

il viendra

$$\varphi_i(u) = S_i[\varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \ldots, \varphi_n(mu)].$$

Si les fonctions S_i sont rationnelles, la substitution

$$[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u); \varphi_1(mu), \varphi_2(mu), \ldots, \varphi_n(mu)]$$

est une substitution Cremona; je dirai alors que le théorème de multiplication est crémonien.

Plaçons-nous dans le cas où les quantités appelées plus haut $B_{i,k}$ ont les valeurs suivantes

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k).$$

Dans ce cas les séries fondamentales (3) dépendent de n constantes arbitraires

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n.$$

Si le théorème défini par les équations (2) est crémonien et si de plus on a

$$B_{i,i} = m, \qquad B_{i,k} = 0 \qquad (i \gtrless k),$$

je dirai, pour abréger, que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

sont crémoniennes. Les fonctions crémoniennes méritent par leurs curieuses propriétés de retenir quelque temps notre attention.

Le cas le plus simple est évidemment celui où la substitution Cremona se réduit à une simple substitution linéaire, c'est-à-dire celui où les fonctions R_i se réduisent au quotient de deux polynômes du pre-

mier degré, le dénominateur étant le même pour toutes les fonctions R_i. Mais ce cas ne présente pas d'intérêt; car il est aisé de vérifier que les fonctions $\varphi_i(u)$ se réduisent alors à la forme

$$\frac{\beta_i u}{1 - \alpha u},$$

les α et les β étant des coefficients constants.

Nous ne nous occuperons donc que des fonctions crémoniennes correspondant à des substitutions Crèmona d'ordre au moins égal à 2. Ces fonctions sont caractérisées par ce fait que

$$\varphi_1(m^p u), \quad \varphi_2(m^p u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(m^p u)$$

sont des fonctions rationnelles de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u),$$

quand p est un entier quelconque *positif ou négatif*.

Je me poserai d'abord la question suivante :

Peut-on disposer des n constantes

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n$$

qui entrent dans nos séries fondamentales, de telle sorte que les fonctions

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

puissent prendre tel système de valeurs que l'on veut?

Soit, par exemple,

$$\varphi_1(u) = a_1, \qquad \varphi_2(u) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(u) = a_n$$

ce système.

Considérons alors le système

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right), \quad \ldots, \quad \varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right).$$

Si nous appelons, pour abréger,

$$a_1 C, \quad a_2 C, \quad \ldots, \quad a_n C,$$

ce que devient le système

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

quand on lui applique la transformation Crémona envisagée; si nous appelons de même

$$a_1 C^p, \quad a_2 C^p, \quad \ldots, \quad a_n C^p,$$

ce que devient ce même système quand on lui applique p fois cette même transformation Cremona ; si nous appelons

$$a_1 C^{-1}, \quad a_2 C^{-1}, \quad \ldots, \quad a_n C^{-1},$$

ce que devient ce système quand on lui applique la transformation Cremona renversée; si nous appelons

$$a_1 C^{-p}, \quad a_2 C^{-p}, \quad \ldots, \quad a_n C^{-p},$$

ce que devient ce système quand on lui applique p fois cette transformation renversée, il est clair que l'on aura

$$\varphi_1\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_1 C^{-p},$$
$$\varphi_2\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_2 C^{-p},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi_n\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_n C^{-p}.$$

Si p est entier positif et qu'on le fasse croître au delà de toute limite, les premiers membres de ces égalités tendront vers o, car les fonctions $\varphi_i(u)$ s'annulent avec u; on aura donc

$$\lim a_1 C^{-p} = \lim a_2 C^{-p} = \ldots = \lim a_n C^{-p} = 0 \qquad (p = \infty).$$

Cette condition est donc nécessaire pour que l'on puisse disposer des β, de telle sorte que

$$\varphi_1(u) = a_1, \qquad \varphi_2(u) = a_2, \qquad \ldots, \qquad \varphi_n(u) = a_n.$$

Je dis que cette condition est suffisante.

En effet, nous avons vu que $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont des fonctions de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$ qui peuvent se développer suivant les puissances croissantes de ces variables pourvu que leurs modules soient assez petits.

Posons donc

$$(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ z_n = \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \end{array} \right.$$

le déterminant fonctionnel des φ par rapport aux $B_i u$ ne s'annule pas pour $u = 0$. On peut donc tirer des équations (12)

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{array} \right.$$

les fonctions ψ pouvant se développer suivant les puissances des z_i pourvu que le module de ces quantités soit assez petit, c'est-à-dire pourvu que l'on ait

$$|z_1| < \rho, \qquad |z_2| < \rho, \qquad \ldots, \qquad |z_n| < \rho.$$

Cela posé, des équations

$$(14) \qquad \varphi_i(u) = a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

nous pouvons tirer

$$\varphi_i\left(\frac{u}{m^p}\right) = a_i C^{-p}.$$

Si les conditions énoncées plus haut sont satisfaites, c'est-à-dire si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad (\text{pour } p = \infty),$$

on pourra prendre p assez grand pour que

$$|a_i C^{-p}| < \rho \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

et alors on aura, en vertu des équations (13),

$$\beta_i u = m^p \psi_i(a_1 C^{-p}, a_2 C^{-p}, \ldots, a_n C^{-p});$$

on aura donc trouvé des valeurs de $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ qui satisferont aux équations (14). C. Q. F. D.

Appelons point analytique un système de n quantités quelconques, par exemple le système $a_1, a_2, \ldots, a_n$; appelons domaine un ensemble quelconque de points analytiques.

La question que nous nous sommes posée est la suivante :

Quand on donne à $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ toutes les valeurs possibles, $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent-ils prendre toutes les valeurs possibles, ou bien le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste-t-il compris dans un certain domaine?

Il résulte évidemment de ce qui précède que, si l'on a

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$; les fonctions $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ pourront prendre toutes les valeurs possibles.

Si, au contraire, les points analytiques qui jouissent de la propriété

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

appartiennent à un certain domaine D, le point analytique $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ restera compris dans ce domaine D.

Tout dépend donc des propriétés de la substitution Cremona. Je ne crois pas que les substitutions Cremona aient été étudiées jusqu'ici d'une manière approfondie à ce point de vue spécial; d'autre part, les

bornes de ce travail ne me permettent pas d'y insérer une étude aussi délicate et aussi complexe. Je laisserai donc sans solution la question suivante :

Comment peut-on reconnaître si une substitution Cremona, appliquée une infinité de fois à un point analytique, fait tendre ce point analytique vers un même point limite quel que soit le point analytique qui ait servi de point de départ?

Il est clair d'abord qu'un point limite ne peut être qu'un des points doubles de la substitution Cremona, c'est-à-dire un point analytique satisfaisant à la condition

$$a_1 C = a_1, \qquad a_2 C = a_2, \qquad \ldots, \qquad a_n C = a_n.$$

Soit $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ un point double quelconque.

Mais tous les points doubles ne sont pas des points limites. Formons l'équation suivante en S

$$\begin{vmatrix} \frac{d(a_1 C)}{da_1} - S & \frac{d(a_2 C)}{da_1} & \ldots & \frac{d(a_n C)}{da_1} \\ \frac{d(a_1 C)}{da_2} & \frac{d(a_2 C)}{da_2} - S & \ldots & \frac{d(a_n C)}{da_2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \frac{d(a_1 C)}{da_n} & \frac{d(a_2 C)}{da_n} & \ldots & \frac{d(a_n C)}{da_n} - S \end{vmatrix} = 0,$$

et faisons, dans le premier membre de cette équation,

$$a_1 = a_1^0, \qquad a_2 = a_2^0, \qquad \ldots, \qquad a_n = a_n^0,$$

nous aurons une équation algébrique de degré n en S.

Ou bien les modules des racines de cette équation seront tous plus grands que 1.

Dans ce cas, on aura

$$\lim a_i C^{-p} = a_i^0, \qquad \text{pour } p = \infty,$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point analytique a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0 sera un point limite de la substitution inverse C^{-1}.

Ou bien les modules des racines seront tous plus petit que 1, et l'on aura

$$\lim a_i C^p = a_i^0 \qquad (\text{pour } p = \infty),$$

pourvu que $|a_i - a_i^0|$ soit suffisamment petit et le point $a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0$ sera un point limite de la substitution directe C.

Ou bien les modules des racines seront les uns plus grands et les autres plus petits que 1, et le point a_1^0, a_2^0, ..., a_n^0 ne sera pas un point limite, ni pour C, ni pour C^{-1}.

Il y a lieu, en outre, de considérer les points limites oscillants. J'appelle ainsi les points qui sont des points limites pour une puissance entière positive C^q de C sans être des points limites pour C.

Il est clair que, si une substitution C^{-1} possède plusieurs points limites ou plusieurs points limites oscillants, on ne pourra pas avoir

$$\lim a_i C^{-p} = 0 \qquad (p = \infty),$$

quel que soit le point analytique initial $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Il doit être facile de construire des substitutions Cremona qui admettent plusieurs points limites. Si l'on appelle $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ les fonctions crémoniennes correspondantes, le point analytique $\varphi_1(u)$, $\varphi_2(u)$, ..., $\varphi_n(u)$ restera compris dans un certain domaine D.

Il est à remarquer que ce domaine D reste le même quel que soit u, car il est défini par la condition

$$\lim a_i C^{-p} = 0,$$

où u n'intervient pas.

Je suis parvenu également à former des substitutions Cremona C^{-1} qui n'ont qu'un point limite 0, 0, ..., et qui sont telles que

$$\lim a_i C^{-p} = 0.$$

quel que soit le point analytique $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sauf pour des points ou des lignes exceptionnels. Les fonctions crémoniennes correspon-

dantes sont donc telles que $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ peuvent prendre toutes les valeurs possibles. On trouvera ces exemples plus loin.

Dans le doute, je me bornerai à appeler D le domaine où le point analytique $\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)$ reste compris sans exclure le cas où le domaine D comprendrait tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS CRÉMONIENNES.

Reprenons les équations

$$(12)\qquad \left\{\begin{array}{l} z_1 = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ z_2 = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \varphi_3(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u); \end{array}\right.$$

d'où nous avons tiré

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{l} \beta_1 u = \psi_1(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \beta_2 u = \psi_2(z_1, z_2, \ldots, z_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \beta_n u = \psi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n), \end{array}\right.$$

et proposons-nous d'étudier les fonctions ψ.

Nous avons vu d'abord que, si

$$|z_i| < \rho,$$

ces fonctions peuvent se développer suivant les puissances croissantes des z : ce sont donc des fonctions uniformes des z.

En second lieu, ces fonctions ψ, d'après leur définition, n'existent qu'à l'intérieur du domaine D.

Je dis qu'à l'intérieur de ce domaine tout entier, c'est-à-dire *partout où elles existent, elles sont uniformes.*

On a, en effet,

$$\beta_i u = \psi_i(z_1, z_2, \ldots, z_n) = m^p \psi_i(z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}).$$

Si le point analytique $z_1, z_2, \ldots, z_n$ appartient au domaine D, on pourra prendre p assez grand pour que

$$|z_k C^{-p}| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Alors $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$. Mais $z_1 C^{-p}, z_2 C^{-p}, \ldots, z_n C^{-p}$ sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Donc $\beta_i u$ est une fonction uniforme de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Ainsi *les fonctions ψ_i sont uniformes.*

Cherchons quels sont les points où ces fonctions ψ_i deviennent indéterminées.

Si p est assez grand pour que

$$|z_k C^{-p}| < \rho \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$\beta_i u$ est une fonction uniforme et *déterminée* des $z_k C^{-p}$. Pour que $\beta_i u$ soit une fonction indéterminée des z_k, il faut donc que les $z_k C^{-p}$ soient des fonctions indéterminées des z_k, ce qui peut arriver :

1° Si les $z_k C^{-p}$ sont fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+1}$;

2° Si les $z_k C^{-p+1}$ sont fonctions indéterminées des $z_k^k C^{-p+2}$;

. . . . . ;

p° ou enfin si les $z_k C^{-1}$ sont fonctions indéterminées des z_k.

Or la substitution C étant une substitution Cremona, les $z_k C$ sont des fonctions rationnelles de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; ces fonctions rationnelles ne peuvent devenir indéterminées que si leur numérateur et leur dénominateur s'annulent à la fois.

Or cela arrive en certains points qui sont connus sous le nom de *points fondamentaux* de la substitution C.

Si pour

$$z_1 = \alpha_1, \qquad z_2 = \alpha_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \alpha_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C, \quad z_2 C, \quad \ldots, \quad z_n C$$

s'annulent à la fois, le point analytique $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ est un point fondamental de la substitution C.

De même, si, pour

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

le numérateur et le dénominateur de l'une au moins des n fonctions rationnelles

$$z_1 C^{-1}, \qquad z_2 C^{-1}, \qquad \ldots, \qquad z_n C^{-1},$$

s'annulent à la fois, le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ est un point fondamental de C^{-1}.

Pour que les $z_k C^{-p+h}$ soient fonctions indéterminées des $z_k C^{-p+h+1}$, il faut donc et il suffit que l'on ait

$$z_k C^{-p+h+1} = \gamma_k,$$

le point analytique $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ étant l'un des points fondamentaux de C^{-1}, ou bien

$$z_k = \gamma_k C^{p-h-1}.$$

Pour que les $z_k C^{-p}$ soient fonctions indéterminées des z_k, il faut donc que l'on ait

$$z_k = \gamma_k$$

ou

$$z_k = \gamma_k C,$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^2, \qquad \ldots$$

ou

$$z_k = \gamma_k C^{p-1}.$$

Enfin, pour que les fonctions ψ_i soient indéterminées, il faut que l'on ait ou bien

$$z_1 = \gamma_1, \qquad z_2 = \gamma_2, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_n,$$

ou bien

$$z_1 = \gamma_1 C^q, \qquad z_2 = \gamma_2 C^q, \qquad \ldots, \qquad z_n = \gamma_2 C^q,$$

q étant un entier positif.

En d'autres termes, les points d'indétermination des fonctions ψ_i sont les points fondamentaux $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ de C^{-1} et leurs transformés par les diverses puissances entières positives de C.

Je terminerai ce qui regarde les fonctions ψ en disant qu'elles ne peuvent avoir de point singulier essentiel à l'intérieur même du domaine D, mais seulement sur les limites de ce domaine. Dans le cas particulier que nous n'avons pas exclu, où le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels, ce sont ces points exceptionnels qui serviront de limite au domaine D et qui seront les points singuliers essentiels des fonctions ψ_i.

Cherchons maintenant quelle relation il y a entre

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1),$$

u_1 et u_0 étant deux valeurs quelconques de u.

Je dis que $\varphi_i(u_1)$ est une fonction uniforme de $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ tant que le point analytique $\varphi_1(u_0), \varphi_2(u_0), \ldots, \varphi_n(u_0)$ sera compris dans le domaine D.

En effet, d'après ce qui précède,

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0,$$

sont des fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0).$$

D'autre part,

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_0, \quad \beta_2 u_0, \quad \ldots, \quad \beta_n u_0 \quad \text{et} \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Enfin

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\beta_1 u_1, \quad \beta_2 u_1, \quad \ldots, \quad \beta_n u_1.$$

Donc

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0), \quad \frac{u_1}{u_0}.$$

Appelons P_0 le point analytique

$$\varphi_1(u_0), \quad \varphi_2(u_0), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_0)$$

et P_1 le point analytique

$$\varphi_1(u_1), \quad \varphi_2(u_1), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u_1).$$

Nous voyons d'abord que, si l'un des deux points P_0 et P_1 appartient au domaine D, il en est de même de l'autre; d'autre part, les coordonnées de P_1 sont fonctions uniformes de celles de P_0, et les coordonnées de P_0 fonctions uniformes de celles de P_1.

En d'autres termes, la correspondance entre P_0 et P_1 définit une transformation biuniforme du domaine D en lui-même.

Cette transformation biuniforme devient birationnelle quand $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance entière positive ou négative de m. Il n'en est pas de même en général si $\frac{u_1}{u_0}$ est quelconque; car les points d'indétermination des coordonnées de P_1 considérées comme fonctions des coordonnées de P_0 sont en général les mêmes que les points d'indétermination des fonctions ψ.

Tout me porte à croire que les transcendantes qui définissent les coordonnées de P_1 en fonctions des coordonnées de P_0 n'existent en général que dans le domaine D. Toutefois je n'ai pu le démontrer rigoureusement; il y a certainement au moins un cas d'exception, puisque, si $\frac{u_1}{u_0}$ est une puissance de m, les coordonnées de P_1 sont fonctions rationnelles de celles de P_0. Mais il est possible (et même probable) qu'il n'y en ait pas d'autre.

Cherchons maintenant à exprimer

$$\varphi'_1(u), \quad \varphi'_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi'_n(u)$$

en fonctions de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u)$$

et de u.

En premier lieu,

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots, \quad \beta_n u$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

D'ailleurs $\varphi'_1(u), \varphi'_2(u), \ldots, \varphi'_n(u)$ sont fonctions uniformes de

$$\beta_1, \quad \beta_2, \quad \ldots, \quad \beta_n \quad \text{et} \quad u.$$

Donc

$$\varphi'_1(u), \quad \varphi'_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi'_n(u)$$

sont fonctions uniformes de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u), \quad u.$$

D'autre part, si nous posons

$$\beta_1 u = u_1, \qquad \beta_2 u = u_2, \qquad \ldots, \qquad \beta_n u = u_n.$$

$\varphi_i(u)$ devient une fonction de n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, et l'on a

$$\varphi_i(u) = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_n):$$

d'où

$$\varphi'_i(u) = \beta_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + \beta_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \ldots + \beta'_n \frac{d\varphi_i}{du_n};$$

d'où

$$u\,\varphi'_i(u) = u_1 \frac{d\varphi_i}{du_1} + u_2 \frac{d\varphi_i}{du_2} + \ldots + u_n \frac{d\varphi_i}{du_n}.$$

ce qui montre que $u\,\varphi'_i(u)$ est une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ou, ce qui revient au même, de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$.

Mais

$$\beta_1 u, \quad \beta_2 u, \quad \ldots, \quad \beta_n u$$

sont fonctions de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Donc $u\,\varphi_i'(u)$ est une fonction de

$$\varphi_1(u), \quad \varphi_2(u), \quad \ldots, \quad \varphi_n(u).$$

Ainsi les fonctions $\varphi_i(u)$ satisfont à un système d'équations différentielles de la forme suivante

$$\begin{aligned}
u\,\varphi_1'(u) &= F_1[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],\\
u\,\varphi_2'(u) &= F_2[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
u\,\varphi_n'(u) &= F_n[\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u)],
\end{aligned}$$

les fonctions F_i étant des transcendantes *uniformes dans le domaine* D.

Ces transcendantes uniformes admettront mêmes points d'indétermination que les fonctions ψ.

J'ai dit plus haut que les fonctions ψ n'existent que dans le domaine D. Cela demande quelques mots d'explication. Supposons, par exemple, que

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

existent dans le domaine δ défini par les inégalités

$$|z_1 - z_1^0| < \rho_1, \qquad |z_2 - z_2^0| < \rho_2, \qquad \ldots, \qquad |z_n - z_n^0| < \rho_n,$$

$z_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ étant des constantes.

Les ψ_i devraient être développables à l'intérieur de ce domaine suivant les puissances des $z_k - z_k^0$.

Supposons que le domaine δ soit situé en partie à l'intérieur de D, en partie à l'extérieur de D.

C'est là ce qui devrait arriver si les fonctions ψ pouvaient être prolongées au delà du domaine D.

Reprenons les fonctions

$$\begin{gathered}\varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u),\\ \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_n(\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u)\end{gathered}$$

et substituons-y $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ à la place de $\beta_1 u, \beta_2 u, \ldots, \beta_n u$; nous verrons $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ devenir fonctions de $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Dans le domaine δ, nous savons que $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ sont fonctions holomorphes de $z_1, z_2, \ldots, z_n$; donc $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ restent finis dans ce domaine.

D'autre part, nous savons que, quelles que soient les quantités $\beta_1 u$, $\beta_2 u, \ldots, \beta_n u$, pourvu qu'elles soient finies, les fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, φ_n sont méromorphes et le point analytique $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ reste dans le domaine D.

Donc, quand le point $z_1, z_2, \ldots, z_n$ restera dans le domaine δ, les quantités φ_i seront fonctions méromorphes des z, et le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, φ_n restera dans le domaine D.

Mais, d'après la définition des fonctions φ et ψ, on aura, dans la partie de δ qui appartient à D et par conséquent dans tout le domaine δ,

$$\varphi_1 = z_1, \qquad \varphi_2 = z_2, \qquad \ldots \qquad \varphi_n = z_n.$$

Le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ ne sortant pas de D, il doit en être de même du point $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Donc il est impossible qu'une partie de δ soit extérieure à D.

Donc les fonctions ψ n'existent pas en dehors de D. C. Q. F. D.

Les fonctions ψ sont donc uniformes partout où elles existent.

Nous avons donc des fonctions uniformes de n variables z_1, $z_2, \ldots, z_n$ qui sont multipliées par un facteur constant m quand ces variables subissent une substitution Cremona donnée.

Le rapport de deux fonctions ψ, par exemple $\frac{\psi_i}{\psi_k}$, demeure inaltéré par la substitution Cremona.

Tout me porte à croire que la fonction $\frac{\psi_i}{\psi_k}$ n'existe pas en dehors de D et est par conséquent uniforme partout où elle existe; je n'en ai pas toutefois de démonstration rigoureuse.

Toutes les fois qu'on pourra le démontrer, on saura construire une fonction uniforme qui n'est pas altérée par la substitution Cremona.

C'est ce qui arrivera en particulier toutes les fois que le domaine D comprendra tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Je dis que toute fonction uniforme F des z, n'existant que dans le domaine D et inaltérée par la substitution Cremona, est une fonction rationnelle des rapports des quantités $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$, si elle est méromorphe dans le domaine D.

En effet, nous avons

$$\begin{aligned} &F(z_1, z_2, \ldots, z_n) \\ &\quad = F[\varphi_1(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \varphi_2(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \ldots, \varphi_n(\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)]. \end{aligned}$$

Cette égalité montre que F est une fonction uniforme de ψ_1, $\psi_2, \ldots, \psi_n$.

Quand les z subissent la substitution Cremona,

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

se changent en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n$$

et F ne change pas.

Si F est une fonction méromorphe des z, ce sera aussi une fonction méromorphe des ψ, et nous aurons, dans le voisinage du point

$$\psi_1 = \psi_2 = \ldots = \psi_n = 0,$$

nous aurons, dis-je,

$$F = \frac{S_1}{S_2},$$

S_1 et S_2 étant des séries ordonnées suivant les puissances croissantes des ψ.

Le quotient $\frac{S_1}{S_2}$ ne doit pas changer quand on change

$$\psi_1, \quad \psi_2, \quad \ldots, \quad \psi_n$$

en

$$m\psi_1, \quad m\psi_2, \quad \ldots, \quad m\psi_n.$$

Et cela ne peut arriver que si les deux séries S_1 et S_2 se réduisent à des polynômes entiers homogènes de même degré en $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$.

C. Q. F. D.

EXEMPLES PARTICULIERS.

J'ai cherché à former des exemples pour lesquels le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf quelques points exceptionnels.

Les premiers exemples que j'ai obtenus m'ont été fournis par des substitutions Cremona qui peuvent être ramenées à la forme

$$\left(z_1, z_2, \ldots, z_n; \frac{\alpha_1 z_1 + \beta_1}{\gamma_1 z_1 + \delta_1}, \frac{\alpha_2 z_2 + \beta_2}{\gamma_2 z_2 + \delta_2}, \ldots, \frac{\alpha_n z_n + \beta_n}{\gamma_n z_n + \delta_n}\right),$$

les $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant des constantes, ou dont une puissance peut être ramenée à cette forme.

Les fonctions φ_i correspondantes sont rationnelles; ce cas ne présente donc aucun intérêt.

J'ai réussi ensuite à former un exemple un peu plus général.

Considérons deux variables seulement et, afin d'éviter les indices, représentons-les par x et y et non plus par z_1 et z_2.

Envisageons ensuite la substitution Cremona

$$\left(x, y; \frac{mx}{1 - \beta x}, \frac{ay + b}{cy + d}\right);$$

m est le nombre que nous avons toujours appelé ainsi; β est une constante; enfin a, b, c, d sont des polynômes entiers en x; je suppose que, pour $x = 0$, on ait

$$b = 0, \qquad a = m, \qquad d = 1, \qquad c = c_0.$$

Si je désigne par C cette substitution et que je pose, pour abréger,

$$x' = x\mathrm{C}, \qquad y' = y\mathrm{C},$$

nous aurons

$$x' = \frac{mx}{1 - \beta x}, \qquad y' = \frac{ay + b}{cy + d}.$$

Nous tirerons de là

$$x = \frac{x'}{m + \beta x'}, \qquad y = \frac{dy' - b}{-cy' + a}.$$

Or a, b, c, d sont fonctions entières de x et par conséquent fonctions rationnelles de x'. Donc x et y sont fonctions rationnelles de x et y'.

Notre substitution est donc bien *birationnelle*.

Je dis que cette substitution admet quatre points doubles.

En effet, pour que l'on ait

$$x = x', \qquad y = y',$$

il faut d'abord que l'on ait

$$x = x'.$$

Or la substitution homographique

$$\left(x, \frac{mx}{1 - \beta x}\right)$$

admet deux points doubles, qui sont

$$x = 0, \qquad x = \frac{1 - m}{\beta}.$$

Si l'on fait $x = 0$, il vient

$$y' = \frac{my}{1 + c_0 y}$$

et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{my}{1 + c_0 y}\right)$$

a deux points doubles qui sont

$$y = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Si l'on fait $x = \frac{1-m}{\beta}$, les quatre polynômes a, b, c, d prennent certaines valeurs a_1, b_1, c_1, d_1, et la substitution homographique

$$\left(y, \frac{a_1 y + b_1}{c_1 y + d_1}\right)$$

admet deux points doubles, que j'appellerai

$$y = y_1, \qquad y = y_2.$$

Notre substitution Cremona a donc quatre points doubles

$$x = y = 0, \qquad x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0},$$

$$x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_1, \qquad x = \frac{1-m}{\beta}, \qquad y = y_2.$$

Avant d'aller plus loin, examinons ce qui se passe dans le voisinage du point double

$$x = 0, \qquad y = \frac{m-1}{c_0}.$$

Posons, pour abréger,

$$\xi = \frac{x}{x - \frac{1-m}{\beta}}, \qquad y = \eta + \frac{m-1}{c_0}.$$

Soient ξ' et η' ce que deviennent ξ et η après qu'on leur a appliqué la substitution Cremona ; il vient

$$\xi' = m\xi, \qquad \eta' = f(\xi, \eta),$$

$f(\xi, \eta)$ étant une fonction rationnelle de ξ et de η, s'annulant avec ξ et η.

Existe-t-il deux fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ admettant le théorème de multiplication suivant

$$(15)\qquad \theta_1(mu) = m\theta_1(u), \qquad \theta_2(mu) = f[\theta_1(u), \theta_2(u)].$$

Pour le reconnaître, formons l'équation définie plus haut

$$F(S) = 0,$$

de telle façon que $F(m^p)$ soit le déterminant des équations (4).

Si l'on fait $\xi = 0$, il vient

$$f(\xi, \eta) = \frac{\eta}{m - c_0\eta}.$$

J'en conclus que

$$F(S) = (S - m)\left(S - \frac{1}{m}\right).$$

Donc $F(m) = 0$, $F(m^p) \gtrless 0$ si p est un entier positif plus grand que 1.

Il existe donc des fonctions uniformes $\theta_1(u)$ et $\theta_2(u)$ qui satisfont aux conditions (15). Ces fonctions, d'après les principes exposés plus haut, dépendront d'un seul paramètre arbitraire que j'appellerai β_1.

On a d'ailleurs

$$\theta_1(u) = \beta_1 u,$$

et je puis, sans restreindre la généralité, supposer $\beta_1 = 1$: d'où

$$\theta_1(u) = u.$$

Cela posé, si l'on a

$$\eta = \theta_2(\xi),$$

on aura aussi

$$\eta' = \theta_2(\xi')$$

et, plus généralement,

$$\eta C^p = \theta_2(\xi C^p),$$

en désignant par ξC^p et ηC^p ce que deviennent ξ et η quand ces quantités ont subi la substitution C^p et en supposant que p soit un entier quelconque, positif ou négatif.

Lorsque p croît indéfiniment, on a

$$\lim \xi C^{-p} = \lim m^{-p} \xi = 0 \qquad (\text{puisque } |m| > 1),$$

et, si $\eta_1 = \theta_2(\xi)$, on a

$$\lim \eta_1 C^{-p} = \lim \theta_2(\xi C^{-p}) = \theta_2(0) = 0.$$

Posons

$$\frac{m-1}{c_1} + \theta_2\left(\frac{x}{x - \frac{1-m}{3}}\right) = \theta(x).$$

Quand on aura

$$y = \theta(x),$$

on aura

$$\eta_1 = \theta_2(\xi)$$

et, par conséquent,

$$y C^p = \theta(x C^p) \qquad (p \text{ entier positif ou négatif}).$$

On aura d'ailleurs, pour $p = \infty$,

$$\lim x C^{-p} = 0, \qquad \lim y C^{-p} = \frac{m-1}{c_1};$$

donc, si

$$y = \theta(x),$$

on n'a pas

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0.$$

Il en est encore de même si

$$x = \frac{1-m}{3};$$

car on a alors

$$x C^{-p} = \frac{1-m}{3}, \qquad \lim x C^{-p} = \frac{1-m}{3}.$$

Mais je dis que, dans tous les autres cas, c'est-à-dire toutes les fois qu'on n'a pas

$$y = \theta(x) \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{1-m}{3},$$

on a

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0.$$

En effet, le point $x = y = 0$ est un point limite de C^{-1} dans le sens que nous avons donné plus haut à ce mot (les racines de l'équation en S sont en effet toutes deux égales à m et $|m| > 1$). Si donc les modules de x et de y sont assez petits, $x C^{-p}$ et $y C^{-p}$ tendront vers 0 quand p croîtra au delà de toute limite.

On pourra donc trouver une quantité ρ telle que, si

$$|x| < \rho, \qquad |y| < \rho,$$

on ait

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$|x| < \rho, \qquad |y| > \rho.$$

J'observe que, si l'on regarde x comme donné, la substitution

$$\left(y, \frac{ay+b}{cy+d}\right) \tag{16}$$

sera une substitution homographique.

Soient donc

$$(x, y), \quad (x, y_1), \quad (x, y_2), \quad (x, y_3)$$

quatre points analytiques ayant même abscisse x.

Leurs transformés par C^{-1}

$$(x C^{-1}, y C^{-1}), \quad (x C^{-1}, y_1 C^{-1}), \quad (x C^{-1}, y_2 C^{-1}), \quad (x C^{-1}, y_3 C^{-1})$$

auront même abscisse $x C^{-1}$ et il en sera de même de leurs $p^{\text{ièmes}}$ transformés

$$(x C^{-p}, y C^{-p}), \quad (x C^{-p}, y_1 C^{-p}), \quad (x C^{-p}, y_2 C^{-p}), \quad (x C^{-p}, y_3 C^{-p}),$$

qui auront même abscisse $x C^{-p}$.

De plus, la substitution (16) étant homographique, on aura

$$\frac{y C^{-1} - y_1 C^{-1}}{y C^{-1} - y_2 C^{-1}} \frac{y_3 C^{-1} - y_2 C^{-1}}{y_3 C^{-1} - y_1 C^{-1}} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}$$

et de même

$$(17) \qquad \frac{y C^{-p} - y_1 C^{-p}}{y C^{-p} - y_2 C^{-p}} \frac{y_3 C^{-p} - y_2 C^{-p}}{y_3 C^{-p} - y_1 C^{-p}} = \frac{y - y_1}{y - y_2} \frac{y_3 - y_2}{y_3 - y_1}.$$

Le second membre ne pourrait être égal à 1 que si $y_1 = y_2$ ou si $y = y_3$.

Prenons

$$|y_1| < \rho, \qquad |y_2| < \rho, \qquad y_1 \gtrless y_2, \qquad y_3 = \theta(x).$$

Si l'on n'a pas $y = \theta(x)$, le second membre de (17) sera égal à $M \gtrless 1$.

Si $p = \infty$, on a

$$\lim y_1 C^{-p} = \lim y_2 C^{-p} = 0, \qquad \lim y_3 C^{-p} \gtrless 0,$$

et l'équation (17) devient

$$\frac{\lim y C^{-p}}{\lim y C^{-p}} = M$$

ou, puisque $M \gtrless 1$,

$$\lim y C^{-p} = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On a d'ailleurs

$$\lim x C^{-p} = 0,$$

toutes les fois que x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$.

Supposons enfin

$$|x| > \rho.$$

Si x n'est pas égal à $\frac{1-m}{\beta}$, on a

$$\lim x C^{-p} = 0;$$

on peut donc prendre q assez grand pour que

$$|x C^{-q}| < \rho.$$

On a alors soit

$$|x C^{-q}| < \rho, \qquad |y C^{-q}| < \rho,$$

soit

$$|x C^{-q}| < \rho, \qquad |y C^{-q}| > \rho$$

et l'on retombe sur un des deux cas précédents.

Donc on a

$$\lim x C^{-p} = \lim y C^{-p} = 0,$$

à moins que $y = \theta(x)$ ou $x = \frac{1-m}{\beta}$. C. Q. F. D.

Donc le domaine D comprend tous les points analytiques possibles, sauf les lignes exceptionnelles $y = \theta(x)$ et $x = \frac{1-m}{\beta}$. Rappelons que la fonction $\theta(x)$ est uniforme.

Formons alors les fonctions

$$x = \varphi_1(u) = \varphi_1(\beta_1 u, \beta_2 u),$$
$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u),$$

qui admettent le théorème de multiplication suivant

$$(18) \qquad \varphi_1(mu) = \frac{m\varphi_1(u)}{1-\beta\varphi_1(u)}, \qquad \varphi_2(mu) = \frac{a[\varphi_1(u)]\varphi_2(u) + b[\varphi_1(u)]}{c[\varphi_1(u)]\varphi_2(u) + d[\varphi_1(u)]},$$

où j'ai désigné par la notation $a[\varphi_1(u)]$ le polynôme a où x a été remplacé par $\varphi_1(u)$.

La fonction $\varphi_1(u)$ est manifestement rationnelle; il ne saurait en être de même, en général, de la fonction $\varphi_2(u)$. En effet, la seconde des équations (18) peut s'écrire

$$\varphi_2(mu) = \frac{\lambda\varphi_2(u) + \mu}{\varpi\varphi_2(u) + \omega},$$

λ, μ, ϖ et ω étant des polynômes entiers en u. Ces polynômes peuvent

être quelconques, de même que les polynômes a, b, c, d sont quelconques; la seule condition à laquelle ces polynômes soient assujettis, c'est que l'on ait pour $u = 0$,

$$\mu = 0, \qquad \lambda = m\omega.$$

Je puis donc prendre, par exemple,

$$\mu = 0, \qquad \varpi = 0, \qquad \omega = 1, \qquad \lambda = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right).$$

Il vient alors

$$\varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u);$$

d'où l'on tire aisément

$$(19) \quad \varphi_2(u) = \beta_2 u\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^2 u_0}\right)\left(1 - \frac{u}{m^3 u_0}\right)\cdots \text{(ad inf.)}.$$

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc transcendante et il me suffit évidemment d'avoir établi qu'elle est transcendante dans un cas particulier pour être certain qu'elle n'est pas rationnelle en général.

La parenté de la fonction $\varphi_2(u)$, définie par l'équation (19), avec les fonctions Θ elliptiques, est évidente. On a, en effet,

$$(20) \qquad \varphi_2(mu) = m\left(1 - \frac{u}{u_0}\right)\varphi_2(u),$$

d'où

$$\varphi_2(u) = m\left(1 - \frac{u}{mu_0}\right)\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right);$$

d'où

$$\varphi_2\left(\frac{u}{m}\right) = \frac{\varphi_2(u)}{m}\,\frac{1}{1 - \dfrac{u}{mu_0}}$$

ou, en changeant u en $\dfrac{mu_0^2}{u}$,

$$(21) \qquad \varphi_2\left(\frac{u_0^2}{u}\right) = \frac{\varphi_2\left(\dfrac{mu_0^2}{u}\right)}{m}\,\frac{1}{1 - \dfrac{u_0}{u}}.$$

Si nous multiplions (20) par (21) et si nous posons

$$\tau(u) = \varphi_2(u)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{u}\right),$$

il viendra

$$\tau(mu) = -\frac{u}{u_0}\,\tau(u).$$

Cette équation prouve que

$$\varphi_2(e^z)\,\varphi_2\left(\frac{mu_0^2}{e^z}\right)$$

est une fonction Θ elliptique dont les périodes sont $2i\pi$ et $\log m$.

Revenons au cas général où les polynômes λ, μ, ϖ et ω sont quelconques.

J'observe d'abord que nous pouvons, sans restreindre la généralité, simplifier beaucoup les équations (18). Je dis que l'on peut toujours supposer que β est nul, de sorte que la première des équations (18) se réduise à

$$\varphi_1(mu) = m\,\varphi_1(u).$$

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, on remplacerait la fonction $\varphi_1(u)$ par la fonction

$$\varphi_1^*(u) = \frac{\varphi_1(u)}{\varphi_1(u) - \dfrac{1-m}{\beta}},$$

et l'on aurait

$$\varphi_1^*(mu) = m\,\varphi_1^*(u).$$

Je supposerai donc désormais $\beta = 0$: il vient alors

$$\varphi_1(u) = \beta_1 u.$$

β_1 étant l'une des deux constantes définies plus haut qui entrent dans les séries (3).

Alors on obtiendra les polynômes λ, μ, ϖ et ω en remplaçant tout simplement x par $\beta_1 u$ dans les polynômes a, b, c, d.

Cela posé, nous savons que $\varphi_1(u_1)$ et $\varphi_2(u_1)$ sont fonctions uniformes de $\varphi_1(u_0)$ et de $\varphi_2(u_0)$.

Si nous supposons $\beta_1 = 1$, par exemple, il en résultera que $\varphi_2(u_1)$ est fonction uniforme de $\varphi_2(u_0)$; car $\varphi_1(u_0) = u_0$ est une donnée de la question.

De même, $\varphi_2(u_0)$ est une fonction uniforme de $\varphi_2(u_1)$.

Si donc on suppose que $\beta_1 = 1$, et si u_1 et u_0 sont deux constantes données, il y aura entre $\varphi_2(u_0)$ et $\varphi_2(u_1)$ une relation homographique.

Nos séries (3) dépendant des deux constantes β_1 et β_2, je puis écrire, comme je l'ai déjà fait bien des fois,

$$y = \varphi_2(u) = \varphi_2(\beta_1 u, \beta_2 u).$$

Si nous faisons $\beta_1 = 1$; il vient

$$y = \varphi_2(u, \beta_2 u).$$

On voit que y est une fonction uniforme de β_2. D'autre part, nous avons

$$\beta_1 u = \psi_1(x, y),$$
$$\beta_2 u = \psi_2(x, y).$$

On a évidemment

$$\psi_1(x, y) = x,$$

car

$$\beta_1 u = \varphi_1(u) = x.$$

D'autre part, si l'on fait $\beta_1 = 1$, il vient

$$x = u$$

et

$$\beta_2 = \frac{1}{u}\psi_2(u, y),$$

ce qui montre que, quand $\beta_1 = 1$, et que u est regardé momentanément comme une constante, β_2 est fonction uniforme de y.

Si donc $\beta_1 = 1$ et si u est regardé comme une constante, il y a une relation homographique entre β_2 et y.

La fonction $\varphi_2(u)$ est donc de la forme suivante

$$\varphi_2(u) = \frac{\beta_2 u\, \sigma_1(\beta_1 u) + \tau_1(\beta_1 u)}{\beta_2 u\, \sigma_2(\beta_1 u) + \tau_2(\beta_1 u)},$$

σ_1, τ_1, σ_2 et τ_2 étant des fonctions uniformes de $\beta_1 u$ que nous pouvons toujours supposer entières.

Ces fonctions σ et τ jouissent des propriétés suivantes

$$(22)\qquad \left\{\begin{aligned} m.\eta(u)\sigma_1(mu) &= a\sigma_1(u) + b\sigma_2(u),\\ \eta(u)\tau_1(mu) &= a\tau_1(u) + b\tau_2(u),\\ m.\eta(u)\sigma_2(mu) &= c\sigma_1(u) + b\sigma_2(u),\\ \eta(u)\tau_2(mu) &= c\tau_1(u) + d\tau_2(u). \end{aligned}\right.$$

Dans ces équations (22), nous désignons par $\eta(u)$ une fonction entière de u, et nous supposons qu'on a remplacé x par u dans les polynômes a, b, c, d.

Si l'on pose

$$ad - bc = \delta(u), \qquad \sigma_1(u)\tau_2(u) - \sigma_2(u)\tau_1(u) = \mathrm{D}(u),$$

il viendra

$$(23)\qquad m\eta^2(u)\,\mathrm{D}(mu) = \delta(u)\,\mathrm{D}(u).$$

Cette équation (23) met en évidence le lien qui relie les fonctions σ et τ à la fonction φ_2 définie par l'équation (19) et par conséquent aux fonctions Θ elliptiques.

On en peut encore tirer une autre conclusion.

Si la fonction φ_2 est rationnelle, σ_1, τ_1, σ_2, τ_2, η, D et δ sont des polynômes, et l'équation (23) montre que le polynôme δ doit jouir de propriétés très particulières. Sans entrer dans le détail de la discussion, on voit que la fonction φ_2 ne pourra être rationnelle si le polynôme $\delta = ad - bc$ ne satisfait pas à certaines conditions et, en particulier, s'il n'est pas de degré pair.

La fonction

$$\frac{\psi_2(x, y)}{\psi_1(x, y)} = \frac{\psi_2(x, y)}{x}$$

est uniforme pour toutes les valeurs de x et de y et elle demeure inaltérée par notre substitution Cremona.

Elle admet comme lignes singulières essentielles

$$y = \theta(x)$$

et

$$x = \frac{1 - m}{\beta}$$

(ou $x = \infty$ si, comme nous l'avons supposé, $\beta = 0$). La substitution Cremona

$$\left(x, y, z; \frac{mx}{1 - \beta x}, \frac{ay + b}{cy + d}, \frac{Az + B}{Cz + D}\right)$$

(où a, b, c, d sont des polynômes entiers en x, et A, B, C, D des polynômes entiers en x et y) jouit de propriétés analogues.

Les fonctions dont il a été question dans ce Mémoire et qui demeurent inaltérées par une substitution Cremona et ses puissances, ne sont peut-être que des cas extrêmement particuliers d'une classe plus générale de fonctions uniformes qui demeureraient inaltérées par un *groupe* de substitutions Cremona et qui se présenteraient comme la généralisation la plus naturelle des fonctions hyperfuchsiennes et hyperabéliennes de M. Picard.

Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations;

PAR M. FERDINAND CASPARY.

Mes recherches, relatives aux fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments, m'ont conduit à des relations entre ces fonctions et les coefficients d'un système orthogonal.

Dans le cas où le nombre des arguments est égal à 1 et à 2, ces relations prennent une forme extrêmement simple.

Il y a, dans ce cas, pour les fonctions thêta, pour les fonctions sigma et, par conséquent, aussi pour les fonctions elliptiques et pour les fonctions hyperelliptiques de première espèce des théorèmes qui lient, d'une façon très simple, toutes ces fonctions aux neuf coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal et aux six quantités

$$p_h = -(a_{1h}\,da_{1l} + a_{2h}\,da_{2l} + a_{3h}\,da_{3l}),$$
$$c_h = \quad a_{h1}\,da_{l1} + a_{h2}\,da_{l2} + a_{h3}\,da_{l3},$$

où h, k, l désignent les nombres 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2.

Entre ces quinze quantités a_{mn}, p_h, c_h, que j'appellerai *éléments*

d'un système orthogonal, existent un grand nombre d'identités algébriques et différentielles.

Les identités algébriques, dues à Euler, sont bien connues et se sont présentées très souvent en Mathématiques pures et appliquées.

Les identités différentielles, au contraire, bien que Lagrange et Poisson en aient déjà donné les plus simples, ont été employées seulement, dans ces derniers temps, par M. Hermite et par M. Darboux. En me réservant d'établir, dans une autre occasion, ces identités différentielles d'une façon plus complète qu'on ne l'a fait jusqu'à présent, et d'en déduire des résultats, relatifs aux fonctions elliptiques et aux fonctions hyperelliptiques de première espèce, je me permets de signaler ici une seule conséquence.

On connaît les recherches élégantes et profondes, dues à M. Hermite et à M. Picard, relatives à l'intégration de quelques équations différentielles du second et du troisième ordre au moyen des fonctions elliptiques; ces résultats importants peuvent être tirés des identités entre les différentielles $d^r a_{mn}$ et $d^{r-1} p_h$, $d^{r-1} c_h$ pour r égal à 2 et à 3. A l'aide de cette remarque, on peut généraliser ces découvertes de M. Hermite et de M. Picard et l'on peut établir des résultats analogues pour les équations différentielles d'un ordre supérieur et pour les fonctions hyperelliptiques de première espèce.

Les identités différentielles entre les éléments a_{mn}, p_h, c_h et entre leurs différentielles $d^r a_{mn}$, $d^{r-1} p_h$, $d^{r-1} c_h$ s'emploient en deux sens.

D'une part, on peut en déduire la théorie des fonctions thêta et sigma d'un seul argument et de deux arguments, ainsi que la théorie des fonctions elliptiques et hyperelliptiques de première espèce.

D'autre part, ces identités conduisent à l'application desdites fonctions aux problèmes de la Mécanique et de la Géométrie, à cause de la nature des éléments a_{mn}, p_h, c_h. Les coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ désignent, comme on le sait, les cosinus des angles, formés par les axes rectangulaires de deux systèmes de coordonnées. Par conséquent, en

Mécanique, les quantités p_h et c_h sont proportionnelles aux composantes de la vitesse de rotation autour de l'axe central suivant les directions des axes rectangulaires pour le mouvement direct et inverse. En Géométrie, ces mêmes quantités sont liées à la théorie de la courbure des courbes gauches et des surfaces. C'est à M. Darboux que l'on doit la découverte de cette liaison dont cet illustre géomètre a tiré des résultats du plus haut intérêt.

Le Mémoire présent est consacré exclusivement à la théorie des fonctions thêta et sigma d'un seul argument et à la théorie des fonctions elliptiques.

Après avoir exprimé identiquement les quinze éléments d'un système orthogonal par quatre quantités quelconques (n° **1**), je déduis de ces identités, au moyen des transformations du second degré (n° **2**), les théorèmes I et II qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma (n^{os} **3** et **4**).

Les théorèmes énoncés fournissent, d'une façon élémentaire, et avec très peu de calcul, la théorie des fonctions thêta et sigma, en toute leur généralité.

Pour en donner les principes, j'établis quelques-unes des identités qui ont lieu entre les éléments a_{mn}, p_h, c_h (n° **5**). D'abord je tire de ces identités les relations, relatives aux fonctions thêta (n° **6**) qui fournissent l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce (n° **7**); de plus je transforme un cas spécial du théorème I en le théorème III qui lie les éléments d'un sytème orthogonal aux fonctions elliptiques (n° **8**) et, pour montrer, par un seul exemple, la fécondité de ce théorème, j'en tire, sous des formes bien différentes, les formules d'addition des fonctions elliptiques sn, cn, dn (n° **9**). En joignant alors le théorème III aux théorèmes I et II, j'obtiens les expressions des intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce au moyen des fonctions thêta, leurs théorèmes d'addition, et les formules fondamentales, relatives à la fonction $\wp(u)$ et aux fonctions sigma (n^{os} **10** et **11**). Enfin j'aborde les fonctions doublement périodiques de seconde espèce et j'ajoute quelques remarques sur les différents points de vue sous lesquels les recherches que l'on va lire peuvent être continuées (n° **12**).

1. *Expressions identiques des éléments d'un système orthogonal.* — Les neuf coefficients $a_{mn}(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal, liés entre eux par les relations

$$\left.\begin{aligned} a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 &= 1 \\ a_{l1}a_{m1} + a_{l2}a_{m2} + a_{l3}a_{m3} &= 0 \end{aligned}\right\} (l \neq m;\ l, m = 1, 2, 3)$$

et les six quantités

$$\left.\begin{aligned} p_h &= -(a_{1k}\,da_{1l} + a_{2k}\,da_{2l} + a_{3k}\,da_{3l}) \\ c_h &= a_{k1}\,da_{l1} + a_{k2}\,da_{l2} + a_{k3}\,da_{l3} \end{aligned}\right\} \left\{\begin{aligned} h, k, l &= 1, 2, 3 \\ &\ 2, 3, 1 \\ &\ 3, 1, 2 \end{aligned}\right.$$

peuvent être représentées *identiquement* au moyen de quatre quantités quelconques a_1, a_2, a_3, a_4, comme il suit :

$$\mathfrak{a} = a_1a_4 - a_2a_3, \qquad i = \sqrt{-1};$$

$$(\mathfrak{A})\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{a}(a_{11} + ia_{21}) &= a_1^2 + a_2^2, \\
\mathfrak{a}(a_{12} + ia_{22}) &= -i(a_1^2 - a_2^2), \\
\mathfrak{a}(a_{13} + ia_{23}) &= -2ia_1a_2; \\
\mathfrak{a}(a_{11} - ia_{21}) &= a_3^2 + a_4^2, \\
\mathfrak{a}(a_{12} - ia_{22}) &= -i(a_3^2 - a_4^2), \\
\mathfrak{a}(a_{13} - ia_{23}) &= -2ia_3a_4; \\
\mathfrak{a}a_{31} &= -i(a_1a_3 + a_2a_4), \\
\mathfrak{a}a_{32} &= -(a_1a_3 - a_2a_4), \\
\mathfrak{a}a_{33} &= -(a_1a_4 + a_2a_3);
\end{aligned}\right.$$

$$(\mathfrak{A}')\quad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{a}(p_1 + ip_2) &= 2\,(a_1\,da_3 - a_3\,da_1), \\
\mathfrak{a}(c_1 + ic_2) &= -2\,(a_1\,da_2 - a_2\,da_1), \\
\mathfrak{a}(p_3 + c_3) &= -2i(a_2\,da_3 - a_3\,da_2), \\
\mathfrak{a}(p_1 - ip_2) &= 2\,(a_2\,da_4 - a_4\,da_2), \\
\mathfrak{a}(c_1 - ic_2) &= -2\,(a_3\,da_4 - a_4\,da_3), \\
\mathfrak{a}(p_3 - c_3) &= -2i(a_1\,da_4 - a_4\,da_1).
\end{aligned}\right.$$

2. *Formules auxiliaires, relatives aux fonctions thêta.* — Pour transformer les identités (5) et (5′) en relations relatives aux fonctions thêta, je rappelle rapidement quelques formules auxiliaires.

Jacobi a défini les quatre fonctions thêta par les séries

$$\vartheta(w, q) = \sum_{\mu} (-1)^{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu w i} = 1 - 2q\cos 2w + 2q^4 \cos 4w - 2q^9 \cos 6w + \ldots,$$

$$\vartheta_1(w, q) = -\sum_{\mu} i^{2\mu+1} q^{\frac{1}{2}(2\mu+1)^2} e^{(2\mu+1)wi} = 2\sqrt[4]{q}(\sin w - q^2 \sin 3w + q^6 \sin 5w - \ldots),$$

$$\vartheta_2(w, q) = \sum_{\mu} q^{\frac{1}{2}(2\mu+1)^2} e^{(2\mu+1)wi} = 2\sqrt[4]{q}(\cos w + q^2 \cos 3w + q^6 \cos 5w + \ldots),$$

$$\vartheta_3(w, q) = \sum_{\mu} q^{\mu^2} e^{2\mu w i} = 1 + 2q\cos 2w + 2q^4 \cos 4w + 2q^9 \cos 6w + \ldots,$$

$$(\mu = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \infty).$$

Si l'on forme les produits $\vartheta(w, q)\vartheta(x, q) \ldots \vartheta_3(w, q)\vartheta_3(x, q)$, on trouve aisément les formules suivantes, connues sous le nom de *transformations du second degré* (¹) :

$$(A) \quad \left\{ \begin{aligned}
\vartheta(w, q)\vartheta(x, q) &= \vartheta_3(w + x, q^2)\vartheta_3(w - x, q^2) \\
&\quad - \vartheta_2(w + x, q^2)\vartheta_2(w - x, q^2), \\
\vartheta_1(w, q)\vartheta_1(x, q) &= \vartheta_3(w + x, q^2)\vartheta_2(w - x, q^2) \\
&\quad - \vartheta_2(w + x, q^2)\vartheta_3(w - x, q^2), \\
\vartheta_2(w, q)\vartheta_2(x, q) &= \vartheta_3(w + x, q^2)\vartheta_2(w - x, q^2) \\
&\quad + \vartheta_2(w + x, q^2)\vartheta_3(w - x, q^2), \\
\vartheta_3(w, q)\vartheta_3(x, q) &= \vartheta_3(w + x, q^2)\vartheta_3(w - x, q^2) \\
&\quad + \vartheta_2(w + x, q^2)\vartheta_2(w - x, q^2).
\end{aligned} \right.$$

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 93; mai 1889.

Les formules qui représentent les transformations du second degré sont les conséquences les plus spéciales d'une expression importante que M. Schröter a établie pour les transformations du degré n dans sa célèbre Thèse de doctorat, intitulée : *De æquationibus modularibus*. Regiomonti Pr., p. 7; 1854.

On pourra consulter à ce sujet aussi la Note de M. Schröter, publiée dans ce Journal, 2ᵉ série, t. III, p. 258; 1858.

En introduisant les quatre quantités

$$(\mathfrak{A}_1)\quad \begin{cases} \alpha_{11} = A_1 \vartheta_3(w+x, q^2), & \alpha_{21} = A_2 \vartheta_3(w-x, q^2), \\ \alpha_{12} = A_1 \vartheta_2(w+x, q^2), & \alpha_{22} = A_2 \vartheta_2(w-x, q^2), \end{cases}$$

où A_1, A_2 désignent deux fonctions quelconques, et en écrivant, pour abréger la notation, au lieu de $\vartheta(w, q)$, $\vartheta(x, q)$, ..., $\vartheta_3(w, q)$, $\vartheta_3(x, q)$, plus brièvement $\vartheta(w)$, $\vartheta(x)$, ..., $\vartheta_3(w)$, $\vartheta_3(x)$, les formules $(\mathfrak{A})$ prennent la forme suivante

$$(\mathfrak{A}_2)\quad \begin{cases} \alpha_{11}\alpha_{21} - \alpha_{12}\alpha_{22} = A_1 A_2 \vartheta(w) \vartheta(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{21} + \alpha_{12}\alpha_{22} = A_1 A_2 \vartheta_3(w) \vartheta_3(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = A_1 A_2 \vartheta_1(w) \vartheta_1(x), \\ \alpha_{11}\alpha_{22} + \alpha_{12}\alpha_{21} = A_1 A_2 \vartheta_2(w) \vartheta_2(x). \end{cases}$$

De plus, on déduit des formules $(\mathfrak{A})$

$$(\mathfrak{A}_3)\quad \begin{cases} \alpha_{11}^2 + \alpha_{12}^2 = A_1^2 \vartheta_3(0) \vartheta_3(w+x), & \alpha_{21}^2 + \alpha_{22}^2 = A_2^2 \vartheta_3(0) \vartheta_3(w-x), \\ \alpha_{11}^2 - \alpha_{12}^2 = A_1^2 \vartheta(0) \vartheta(w+x), & \alpha_{21}^2 - \alpha_{22}^2 = A_2^2 \vartheta(0) \vartheta(w-x), \\ 2\alpha_{11}\alpha_{12} = A_1^2 \vartheta_2(0) \vartheta_2(w+x); & 2\alpha_{21}\alpha_{22} = A_2^2 \vartheta_2(0) \vartheta_2(w-x). \end{cases}$$

Enfin on obtient, par la différentiation des formules $(\mathfrak{A}_1)$, $(\mathfrak{A}_2)$, $(\mathfrak{A}_3)$

$$(\mathfrak{A}')\quad \begin{cases} \alpha_{\lambda 1}\, d\alpha_{\lambda 2} - \alpha_{\lambda 2}\, d\alpha_{\lambda 1} = -\tfrac{1}{2} A_\lambda^2 \vartheta_1'(0) \vartheta_1(w \pm x)(dw \pm dx) \qquad (\lambda = 1, 2); \\ \alpha_{1\lambda}\, d\alpha_{2\lambda} - \alpha_{2\lambda}\, d\alpha_{1\lambda} = -\tfrac{1}{2} A_1 A_2 [\vartheta_3'(x) \vartheta_3(w) \pm \vartheta'(x) \vartheta(w)]\, dw \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2} A_1 A_2 [\vartheta_3'(w) \vartheta_3(x) \pm \vartheta'(w) \vartheta(x)]\, dx \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}(A_2\, dA_1 - A_1\, dA_2)[\vartheta_3(w) \vartheta_3(x) \pm \vartheta(w) \vartheta(x)]; \\ \alpha_{1\lambda}\, d\alpha_{2\varkappa} - \alpha_{2\varkappa}\, d\alpha_{1\lambda} = -\tfrac{1}{2} A_1 A_2 [\vartheta_2'(x) \vartheta_2(w) \pm \vartheta_1'(x) \vartheta_1(w)]\, dw \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2} A_1 A_2 [\vartheta_2'(w) \vartheta_2(x) \pm \vartheta_1'(w) \vartheta_1(x)]\, dx \\ \qquad\qquad - \tfrac{1}{2}(A_2\, dA_1 - A_1\, dA_2)[\vartheta_2(w) \vartheta_2(x) \pm \vartheta_1(w) \vartheta_1(x)]; \end{cases}$$

où à la valeur $\lambda = 1$ correspond le signe $+$ et à la valeur $\lambda = 2$ le signe $-$. Dans la troisième formule pour $\lambda = 1$ ou 2 l'indice $\varkappa$ est égal à 2 ou 1.

3. *Théorème relatif aux fonctions thêta.* — Si l'on introduit

$$A_1 : A_2 = \mathfrak{f}; \qquad e' = \pm 1, \qquad e'' = \pm 1, \qquad e = e'e''.$$

et si l'on pose successivement

1.....	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = e''\alpha_{22}$	$a_4 = e'\alpha_{21}$
2.....	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = e''\alpha_{21}$	$a_4 = e'\alpha_{22}$
3.....	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = -e''\alpha_{21}$	$a_4 = e'\alpha_{22}$
4.....	$a_1 = e'\alpha_{11}$	$a_2 = e''\alpha_{12}$	$a_3 = -e''\alpha_{22}$	$a_4 = e'\alpha_{21}$

les identités $(\mathfrak{d})$, $(\mathfrak{d}')$ fournissent, au moyen des formules auxiliaires $(\mathfrak{b}_1)$, $(\mathfrak{b}_2)$, $(\mathfrak{b}_3)$, $(\mathfrak{b}')$, le théorème :

I. *Soient w et x deux arguments quelconques; soient $\mathfrak{f}$ une fonction quelconque, $e = \pm 1$ et $i = \sqrt{-1}$. Alors les fonctions thêta sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :*

$$a_{11} + ia_{21} = \mathfrak{f}\,\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w+x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)},$$

$$a_{12} + ia_{22} = -\,i\mathfrak{f}\,\frac{\vartheta(0)\,\vartheta(w+x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)},$$

$$a_{13} + ia_{23} = -\,ei\mathfrak{f}\,\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w+x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)};$$

$$a_{11} - ia_{21} = \mathfrak{f}^{-1}\,\frac{\vartheta_3(0)\,\vartheta_3(w-x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)},$$

$$a_{12} - ia_{22} = (-1)^{s_2+1}\,\varepsilon\, i\mathfrak{f}^{-1}\,\frac{\vartheta(0)\,\vartheta(w-x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)},$$

$$a_{13} - ia_{23} = -\,e\varepsilon\, i\mathfrak{f}^{-1}\,\frac{\vartheta_2(0)\,\vartheta_2(w-x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)};$$

$$a_{3h} = \varepsilon_h\,\frac{\vartheta_{s_h}(w)\,\vartheta_{s_h}(x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)}$$

$$(h = 1, 2, 3; \quad \varepsilon_1 = -e\varepsilon i, \quad \varepsilon_2 = -e\varepsilon, \quad \varepsilon_3 = -1).$$

$$p_h = -ia_{3h} m_{s_h};$$

$$c_1 + ic_2 = e^{\frac{\pi}{\omega}} \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(w+x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)}(dw + dx),$$

$$c_1 - ic_2 = (-1)^{s+1} e^{\frac{\pi}{\omega}-1} \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s(w)\,\vartheta_s(x)}(dw - dx),$$

$$c_3 = -im_s,$$

où

$$m_j = \frac{\vartheta_j'(x)}{\vartheta_j(x)}\,dw + \frac{\vartheta_j'(w)}{\vartheta_j(w)}\,dx + d\log\mathfrak{z},$$

$$(j = s, s_1, s_2, s_3).$$

Dans ces expressions l'unité ε, *et les indices* s, s_1, s_2, s_3 *sont définis par ce Tableau :*

	ε.	s.	s_1.	s_2.	s_3.
1.....	+1	0	2	1	3
2.....	+1	1	3	0	2
3.....	−1	2	0	3	1
4.....	−1	3	1	2	0

Le théorème précédent comprend quatre systèmes de relations dont j'ai déjà donné le second qui correspond aux valeurs $\varepsilon = 1$, $s = 1$, $s_1 = 3$, $s_2 = 0$, $s_3 = 2$ antérieurement [1]. On déduit de celui-ci le théorème analogue au théorème précédent, relatif aux fonctions sigma, si l'on introduit au lieu des fonctions thèta les fonctions sigma, et si l'on remplace a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3 par a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1; substitution qui ne change pas les quantités c_1, c_2, c_3.

4. *Théorème relatif aux fonctions sigma.* — Les fonctions sigma de M. Weierstrass peuvent être définies au moyen des fonctions thèta ainsi

$$(10)\quad \begin{cases} \dfrac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_1'(0)} = \dfrac{\pi}{2\omega}\, e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega}}\,\sigma(u), \\[2ex] \dfrac{\vartheta_\nu(w)}{\vartheta_\nu(0)} = \qquad e^{-\frac{1}{2}\frac{\eta_1 u^2}{\omega}}\,\sigma_h(u), \end{cases}$$

[1] Voir *Comptes rendus*, t. CVII, p. 859, 901, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 95.

où aux indices $\nu = 2, 3, 0$ correspondent respectivement les indices $h = 1, 2, 3$ et où

$$\omega = \lambda K, \qquad w = \frac{u\pi}{2\omega}, \qquad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)},$$

λ étant une constante (voir n° **11**, formule 40).

Au moyen de ces définitions et en posant

$$c_h = \left[\frac{2\omega\,\vartheta_\nu(0)}{\pi\,\vartheta_1'(0)}\right]^2, \qquad \mathcal{F} e^{-\eta\frac{uv}{\omega}} = \mathcal{G}, \qquad x = \frac{v\pi}{2\omega},$$

on obtient

$$\frac{\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\nu(x)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = c_h\,\frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},$$

$$\mathcal{F}^{\pm 1}\,\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_1(w \pm x)\,(dw \pm dx)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = \mathcal{G}^{\pm 1}\,\frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}\,(du \pm dv),$$

$$\mathcal{F}^{\pm 1}\,\frac{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\nu(w \pm x)}{\vartheta_1(w)\,\vartheta_1(x)} = \mathcal{G}^{\pm 1}\,\frac{c_h\,\sigma_h(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},$$

$$\frac{\vartheta_1'(x)}{\vartheta_1(x)}\,dw + \frac{\vartheta_1'(w)}{\vartheta_1(w)}\,dx + d\log\mathcal{F} = \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log\mathcal{G},$$

$$\frac{\vartheta_\nu'(x)}{\vartheta_\nu(x)}\,dw + \frac{\vartheta_\nu'(w)}{\vartheta_\nu(w)}\,dx + d\log\mathcal{F} = \frac{\sigma_h'(v)}{\sigma_h(v)}\,du + \frac{\sigma_h'(u)}{\sigma_h(u)}\,dv + d\log\mathcal{G},$$

$$\begin{pmatrix} \nu = 2, 3, 0 \\ h = 1, 2, 3 \end{pmatrix}.$$

A l'aide de ces formules, on tire du théorème précédent, si l'on y pose

$$e = +1, \qquad \mathcal{E} = +1; \qquad s = 1, \qquad s_1 = 3, \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 2$$

et si l'on introduit

$$ic_1 = \varepsilon_1, \qquad -c_2 = \varepsilon_2, \qquad ic_3 = \varepsilon_3,$$

le théorème suivant :

II. *Soient u et v deux arguments quelconques; soient $\mathcal{G}$ une fonction quelconque et $i=\sqrt{-1}$. Alors les fonctions sigma sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante*

$$a_{1h} \pm i a_{2h} = -\mathcal{G}^{\pm 1} \varepsilon_h \frac{\sigma_h(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)},$$

$$a_{3h} = i \varepsilon_h \frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}, \qquad (h=1, 2, 3),$$

$$p_h = \varepsilon_h \frac{\sigma_h(u)\,\sigma_h(v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)} \left[\frac{\sigma_h'(v)}{\sigma_h(v)}\,du + \frac{\sigma_h'(u)}{\sigma_h(u)}\,dv + d\log\mathcal{G}\right],$$

$$v_1 \pm i v_2 = \mathcal{G}^{\pm 1} \frac{\sigma(u \pm v)}{\sigma(u)\,\sigma(v)}\,(du \pm dv),$$

$$v_3 = -i\left[\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log\mathcal{G}\right],$$

ε_h étant des constantes (¹).

Les théorèmes précédents fournissent toutes les propriétés des fonctions thèta et sigma au moyen des identités algébriques et différentielles qui existent entre les éléments a_{mn}, p_h, v_h, identités dont les plus simples suffisent déjà pour obtenir les relations fondamentales de la théorie des fonctions thèta, des fonctions sigma et des fonctions elliptiques.

3. *Identités entre les éléments d'un système orthogonal.* — Pour les coefficients a_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$ d'un système orthogonal dont le déterminant est $+1$, on a les relations

$$\left.\begin{aligned} a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + a_{m3}^2 &= 1 \\ a_{l1}a_{m1} + a_{l2}a_{m2} + a_{l3}a_{m3} &= 0 \end{aligned}\right\} (l \neq m;\ l, m = 1, 2, 3);$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1h} &= a_{2h}a_{3l} - a_{3h}a_{2l} \\ a_{2h} &= a_{3h}a_{1l} - a_{1h}a_{3l} \\ a_{3h} &= a_{1h}a_{2l} - a_{2h}a_{1l} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h, k, l &= 1, 2, 3; \\ &= 2, 3, 1; \\ &= 3, 1, 2. \end{aligned}$$

dans lesquelles il est permis de changer l'ordre des indices inférieurs.

(¹) *Voir* n° 11, formules (33).

En différentiant ces relations, on tire, de la définition des quantités p_h, v_h, les identités

$$(\mathfrak{I}'_1)\quad \begin{cases} da_{1h} = a_{1k}p_l - a_{1l}p_k = -a_{2h}v_3 + a_{3h}v_2, \\ da_{2h} = a_{2k}p_l - a_{2l}p_k = -a_{3h}v_1 + a_{1h}v_3, \\ da_{3h} = a_{3k}p_l - a_{3l}p_k = -a_{1h}v_2 + a_{2h}v_1. \end{cases}$$

Si les coefficients a_{mn} dépendent de deux variables, par exemple de w et de x, les quantités da_{mn}, p_h, v_h sont fonctions linéaires de dw et dx. Je désignerai, dans ce cas, les coefficients de dw et de dx dans les expressions de p_h et v_h respectivement par p_h^w, p_h^x et v_h^w, v_h^x. Alors on a

$$p_h = p_h^w\,dw + p_h^x\,dx,$$
$$v_h = v_h^w\,dw + v_h^x\,dx.$$

De plus, on a

$$da_{mn} = \frac{\partial a_{mn}}{\partial w}\,dw + \frac{\partial a_{mn}}{\partial x}\,dx.$$

Par conséquent, les identités $(\mathfrak{I}'_1)$ entraînent deux autres systèmes d'identités qui proviennent des identités $(\mathfrak{I}'_1)$, si l'on y remplace

$$da_{mn},\quad p_h,\quad v_h$$

respectivement par

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial w},\quad p_h^w,\quad v_h^w$$

et

$$\frac{\partial a_{mn}}{\partial x},\quad p_h^x,\quad v_h^x.$$

Si l'on forme, à l'aide de ces définitions, les différences

$$\frac{\partial p_h^w}{\partial x} - \frac{\partial p_h^x}{\partial w},\quad \frac{\partial v_h^w}{\partial x} - \frac{\partial v_h^x}{\partial w},$$

on obtient aisément, eu égard aux identités qui proviennent de $(\mathfrak{I}_1)$,

les identités

$$(5_2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial p_h^w}{\partial x} - \dfrac{\partial p_h^x}{\partial w} = p_k^w p_l^x - p_l^w p_k^x = \mathfrak{P}_h, \\ \dfrac{\partial c_h^w}{\partial x} - \dfrac{\partial c_h^x}{\partial w} = - c_k^w c_l^x + c_l^w c_k^x = - \mathfrak{V}_h, \end{cases}$$

dont celles, relatives aux quantités p_h^w, p_h^x ont été données, pour la première fois, par M. Darboux [1]. Les quantités $\mathfrak{P}_h$, $\mathfrak{V}_h$ sont liées entre elles par les mêmes identités que les quantités p_h, c_h; p_h^w, c_h^w; p_h^x, c_h^x, savoir

$$(5_1)\quad \begin{cases} \mathfrak{P}_h = a_{1h}\mathfrak{V}_1 + a_{2h}\mathfrak{V}_2 + a_{3h}\mathfrak{V}_3, \\ \mathfrak{V}_h = a_{h1}\mathfrak{P}_1 + a_{h2}\mathfrak{P}_2 + a_{h3}\mathfrak{P}_3, \end{cases}$$

où $\mathfrak{P}_h$ est écrit au lieu de $\mathfrak{P}_h$, p_h^w, p_h^x et $\mathfrak{V}_h$ au lieu de $\mathfrak{V}_h$, c_h^w, c_h^x.

Ceci établi, je vais exposer rapidement les principes de la théorie des fonctions thêta.

6. *Relations relatives aux fonctions thêta.* — D'après le théorème I, on a

$$p_h = - i a_{3h} m_{s_h},$$

et les expressions analogues, où h est remplacé par k et l; par conséquent, l'identité

$$d a_{3h} = a_{3k} p_l - a_{3l} p_k$$

devient

$$d a_{3h} = i a_{3k} a_{3l} (m_{s_k} - m_{s_l}) \qquad (h, k, l = 1, 2, 3;\ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2)$$

et, en divisant par a_{3h}, on a aussi

$$d \log a_{3h} = \frac{i a_{3k} a_{3l}}{a_{3h}} (m_{s_k} - m_{s_l}).$$

---

[1] *Voir* Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*. Paris, Gauthier-Villars; 1887, t. I, p. 49; Combescure, *Annales de l'École Normale*, 1re série, t. IV, p. 108; 3e série, t. V, p. 52.

Si l'on substitue dans cette formule les expressions des quantités a_{3h}, a_{3k}, a_{3l}, m_{sk}, m_{sl}, établies dans le théorème I, on obtient, en égalant dans les deux membres les coefficients de dw,

$$(a')\qquad \frac{\mathfrak{Z}'_{sh}(w)}{\mathfrak{Z}_{sh}(w)} - \frac{\mathfrak{Z}'_{s}(w)}{\mathfrak{Z}_{s}(w)} = e^{(h)}\frac{\mathfrak{Z}_{sk}(w)\,\mathfrak{Z}_{sk}(x)\,\mathfrak{Z}_{sl}(w)\,\mathfrak{Z}_{sl}(x)}{\mathfrak{Z}_{sh}(w)\,\mathfrak{Z}_{sh}(x)\,\mathfrak{Z}_{s}(w)\,\mathfrak{Z}_{s}(x)}\left[\frac{\mathfrak{Z}'_{sk}(x)}{\mathfrak{Z}_{sk}(x)} - \frac{\mathfrak{Z}'_{sl}(x)}{\mathfrak{Z}_{s}(x)}\right],$$

où $e^{(1)} = -1$, $e^{(2)} = +1$, $e^{(3)} = +1$.

Si l'on pose $s = 1$, $w = 0$, on en déduit

$$(a)\qquad \frac{\mathfrak{Z}'_{sk}(x)}{\mathfrak{Z}_{sk}(x)} - \frac{\mathfrak{Z}'_{sl}(x)}{\mathfrak{Z}_{sl}(x)} = \mathfrak{S}_{sh}\frac{\mathfrak{Z}_{sh}(x)\,\mathfrak{Z}_{1}(x)}{\mathfrak{Z}_{sk}(x)\,\mathfrak{Z}_{sl}(x)},$$

les constantes $\mathfrak{S}_{sh}$ étant définies par

$$\mathfrak{S}_{sh} = -e^{(h)}\frac{\mathfrak{Z}'_{1}(0)\,\mathfrak{Z}_{sh}(0)}{\mathfrak{Z}_{sk}(0)\,\mathfrak{Z}_{sl}(0)}.$$

Or on a, d'après le Tableau du théorème I, pour $s = 1$,

$$s_1 = 3, \qquad s_2 = 0, \qquad s_3 = 2;$$

par conséquent, l'équation (a) fournit

$$(b)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\mathfrak{Z}'_{2}(x)}{\mathfrak{Z}_{2}(x)} - \frac{\mathfrak{Z}'_{3}(x)}{\mathfrak{Z}_{3}(x)} &= \mathfrak{S}_{0}\frac{\mathfrak{Z}(x)\,\mathfrak{Z}_{1}(x)}{\mathfrak{Z}_{2}(x)\,\mathfrak{Z}_{3}(x)},\\ \frac{\mathfrak{Z}'_{3}(x)}{\mathfrak{Z}_{3}(x)} - \frac{\mathfrak{Z}'(x)}{\mathfrak{Z}(x)} &= \mathfrak{S}_{2}\frac{\mathfrak{Z}_{2}(x)\,\mathfrak{Z}_{1}(x)}{\mathfrak{Z}(x)\,\mathfrak{Z}_{3}(x)},\\ \frac{\mathfrak{Z}'(x)}{\mathfrak{Z}(x)} - \frac{\mathfrak{Z}_{3}(x)}{\mathfrak{Z}_{2}(x)} &= \mathfrak{S}_{3}\frac{\mathfrak{Z}_{3}(x)\,\mathfrak{Z}_{1}(x)}{\mathfrak{Z}(x)\,\mathfrak{Z}_{2}(x)}, \end{aligned}\right.$$

où

$$(c)\qquad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{S}_{0} &= -\frac{\mathfrak{Z}'_{1}(0)\,\mathfrak{Z}(0)}{\mathfrak{Z}_{2}(0)\,\mathfrak{Z}_{3}(0)},\\ \mathfrak{S}_{2} &= -\frac{\mathfrak{Z}_{1}(0)\,\mathfrak{Z}_{2}(0)}{\mathfrak{Z}(0)\,\mathfrak{Z}_{3}(0)},\\ \mathfrak{S}_{3} &= +\frac{\mathfrak{Z}'_{1}(0)\,\mathfrak{Z}_{3}(0)}{\mathfrak{Z}(0)\,\mathfrak{Z}_{2}(0)}. \end{aligned}\right.$$

Si l'on porte encore l'expression (a) dans la formule (a'), en y posant, d'ailleurs, $s = 1$, $s_h = \iota$, $s_k = \nu$, $s_l = \tau$ $(\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3)$, on a

$$(d) \quad \frac{\vartheta_1'(w)}{\vartheta_1(w)} - \frac{\vartheta_\iota'(w)}{\vartheta_\iota(w)} = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_\iota(0)}{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\tau(0)}\,\frac{\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\tau(w)}{\vartheta_\iota(w)\,\vartheta_1(w)}, \qquad (\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3).$$

En ajoutant les formules (b), on obtient, d'une part,

$$(1') \qquad \varepsilon_0\,\vartheta^2(x) + \varepsilon_2\,\vartheta_2^2(x) + \varepsilon_3\,\vartheta_3^2(x) = 0.$$

D'autre part, on déduit de l'identité

$$a_{31}^2 + a_{32}^2 + a_{33}^2 = 1$$

la relation

$$(1) \quad \vartheta^2(w)\,\vartheta^2(x) - \vartheta_1^2(w)\,\vartheta_1^2(x) + \vartheta_2^2(w)\,\vartheta_2^2(x) - \vartheta_3^2(w)\,\vartheta_3^2(x) = 0;$$

d'où il suit, pour $w = 0$,

$$(1^*) \qquad \vartheta^2(0)\,\vartheta^2(x) + \vartheta_2^2(0)\,\vartheta_2^2(x) - \vartheta_3^2(0)\,\vartheta_3^2(x) = 0.$$

Si l'on compare cette formule avec la formule $(1')$, on trouve

$$\varepsilon_0 = -\varepsilon.\vartheta^2(0), \qquad \varepsilon_2 = -\varepsilon.\vartheta_2^2(0), \qquad \varepsilon_3 = \varepsilon.\vartheta_3^2(0),$$

et, eu égard aux expressions (c), on a

$$\vartheta_1'(0) = \varepsilon\,\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0).$$

Pour prouver que le facteur ε est indépendant de la quantité q dont $\vartheta_1'(0)$ et $\vartheta(0)$, $\vartheta_2(0)$, $\vartheta_3(0)$ sont fonctions, je différentie deux fois par rapport à w la formule (d), ou plutôt la formule qui en découle, savoir

$$\vartheta_1'(w)\,\vartheta_\iota(w) - \vartheta_\iota'(w)\,\vartheta_1(w) = \frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_\iota(0)}{\vartheta_\nu(0)\,\vartheta_\tau(0)}\,\vartheta_\nu(w)\,\vartheta_\tau(w),$$

$$(\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3):$$

puis je pose $w = 0$. Alors on trouve [1]

$$(e) \qquad \frac{\vartheta_1'''(0)}{\vartheta_1'(0)} - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{\vartheta_2''(0)}{\vartheta_2(0)} - \frac{\vartheta_3''(0)}{\vartheta_3(0)} = 0,$$

et comme on a, d'après la définition des fonctions thêta,

$$\frac{\partial^2 \vartheta_\alpha(w, q)}{\partial w^2} = -4q \frac{\partial \vartheta_\alpha(w, q)}{\partial q} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3),$$

la formule (e) devient

$$\frac{\partial \log \dfrac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0)}}{\partial q} = \frac{\partial \log \varepsilon}{\partial q} = 0.$$

---

[1] Au sujet de cette formule importante on peut consulter : Koenigsberger, *Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen*, t. I, p. 381. Leipzig, Teubner. — Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 257. Paris, Gauthier-Villars. — Frobenius, *Journ. de M. Kronecker*, t. XCVIII, p. 247. D'ailleurs, M. Hermite a bien voulu me communiquer, le 16 juillet 1890, la démonstration élégante que voici :

« En employant la notation de Jacobi, on a la formule élémentaire

$$\Theta(x)\,\mathrm{H}'(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta'(x) = k'\,\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1(x),$$

et j'en tire, pour $x = 0$,

$$\Theta(0)\,\mathrm{H}'(0) = k'\,\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0).$$

» Ensuite je différentie la formule précédente, ce qui donne

$$\Theta(x)\,\mathrm{H}''(x) - \mathrm{H}(x)\,\Theta''(x) = k'[\mathrm{H}_1(x)\,\Theta_1'(x) + \Theta_1(x)\,\mathrm{H}_1'(x)].$$

je divise les deux membres par x, je fais de nouveau $x = 0$, et j'obtiens

$$\Theta(0)\,\mathrm{H}'''(0) + \mathrm{H}'(0)\,\Theta''(0) = k'[\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1''(0) + \Theta_1(0)\,\mathrm{H}_1''(0)].$$

» Cela étant, il suffit de diviser membre à membre avec l'égalité

$$\Theta(0)\,\mathrm{H}'(0) = k'\,\mathrm{H}_1(0)\,\Theta_1(0).$$

pour avoir la relation

$$\frac{\mathrm{H}'''(0)}{\mathrm{H}'(0)} - \frac{\Theta''(0)}{\Theta(0)} - \frac{\Theta_1''(0)}{\Theta_1(0)} - \frac{\mathrm{H}_1''(0)}{\mathrm{H}_1(0)} = 0. \text{ »}$$

Donc ε est indépendant de q, et l'on peut en obtenir la valeur, si l'on pose $q = 0$.

Or on a, d'après les définitions des fonctions thêta, pour $q = 0$,

$$\vartheta_1'(0) : \vartheta_2(0) = 1, \qquad \vartheta(0) = 1, \qquad \vartheta_3(0) = 1:$$

donc

$$\varepsilon = 1$$

et enfin

$$\vartheta_1'(0) = \vartheta(0)\,\vartheta_2(0)\,\vartheta_3(0). \tag{2}$$

A l'aide de cette relation importante, les formules (b) prennent la forme

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)} - \frac{\vartheta_2'(x)}{\vartheta_2(x)} &= \vartheta^2(0)\,\frac{\vartheta(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}, \\ \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \frac{\vartheta_3'(x)}{\vartheta_3(x)} &= \vartheta_2^2(0)\,\frac{\vartheta_2(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_3(x)}, \\ \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \frac{\vartheta_2'(x)}{\vartheta_2(x)} &= \vartheta_3^2(0)\,\frac{\vartheta_3(x)\,\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)\,\vartheta_2(x)}, \end{aligned}\right. \tag{3}$$

et la formule (d) devient, si l'on change encore w en x,

$$\frac{\vartheta_1'(x)}{\vartheta_1(x)} - \frac{\vartheta_\iota'(x)}{\vartheta_\iota(x)} = \vartheta_\iota^2(0)\,\frac{\vartheta_\nu(x)\,\vartheta_\tau(x)}{\vartheta_\iota(x)\,\vartheta_1(x)}, \qquad (\iota, \nu, \tau = 0, 2, 3). \tag{4}$$

Ces formules établies, l'identité

$$\frac{\partial a_{3h}}{\partial x} = i a_{3k}\, a_{3l}(m_{sk}^x - m_{sl}^x) \qquad \left\{\begin{aligned} h, k, l &= 1, 2, 3 \\ &\ 2, 3, 1 \\ &\ 3, 1, 2 \end{aligned}\right.$$

se change immédiatement dans les relations

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta(x)} &= \frac{\vartheta^2(0)\,\vartheta_2(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}, \\ \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta(x)} &= -\frac{\vartheta_3^2(0)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_3(x)}{\vartheta^2(x)}, \\ \frac{d}{dx}\,\frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta(x)} &= -\frac{\vartheta_2^2(0)\,\vartheta_1(x)\,\vartheta_2(x)}{\vartheta^2(x)}. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

Enfin on tire de l'équation (1*), pour $x = 0$,

$$\mathfrak{T}^4(0) + \mathfrak{T}_2^4(0) = \mathfrak{T}_3^4(0). \tag{6}$$

et si l'on prend, dans l'équation (1), au lieu de ϖ, respectivement $\varpi + \frac{1}{2}\pi$, $\varpi + \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2} i \log q$, on obtient, pour $\varpi = 0$,

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{T}^2(0)\,\mathfrak{T}_3^2(x) + \mathfrak{T}_2^2(0)\,\mathfrak{T}_1^2(x) = \mathfrak{T}_3^2(0)\,\mathfrak{T}^2(x),\\ &\mathfrak{T}^2(0)\,\mathfrak{T}_2^2(x) + \mathfrak{T}_3^2(0)\,\mathfrak{T}_1^2(x) = \mathfrak{T}_2^2(0)\,\mathfrak{T}^2(x). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces formules suffisent pour établir l'inversion des intégrales elliptiques de première espèce.

7. *Intégrales elliptiques de première espèce.* — Les formules (7) permettent de poser

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\mathfrak{T}_1(x)}{\mathfrak{T}(x)} = \sqrt{k}\sin\beta,\\ &\frac{\mathfrak{T}_2(x)}{\mathfrak{T}(x)} = \sqrt{\frac{k}{k'}}\cos\beta,\\ &\frac{\mathfrak{T}_3(x)}{\mathfrak{T}(x)} = \frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\beta = \frac{1}{\sqrt{k'}}\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}, \end{aligned}\right. \tag{8}$$

où

$$\frac{\mathfrak{T}_2(0)}{\mathfrak{T}_3(0)} = \sqrt{k}, \qquad \frac{\mathfrak{T}(0)}{\mathfrak{T}_3(0)} = \sqrt{k'} \tag{8*}$$

et, à cause de la formule (6),

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

A l'aide des expressions (8), les formules (5) deviennent

$$\frac{d\beta}{dx} = \mathfrak{T}_3^2(0)\,\Delta\beta \tag{9}$$

ou

$$\mathfrak{T}_3^2(0)x = \int_0^\beta \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}} = \mathrm{F}(\beta) = h.$$

Comme à la valeur $\beta = \frac{\pi}{2}$ correspond la valeur $x = \frac{\pi}{2}$, on a

$$(10) \qquad \vartheta_3^2(0)\frac{\pi}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2\beta}} = \mathrm{K};$$

d'où il suit

$$\vartheta_3^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}, \qquad \vartheta_2^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}k, \qquad \vartheta^2(0) = \frac{2\mathrm{K}}{\pi}k';$$

$$x = \frac{\pi b}{2\mathrm{K}}.$$

Si l'on introduit, d'après Jacobi et Gudermann,

$$\beta = \mathrm{am}\, b; \qquad \sin\beta = \mathrm{sn}\, b, \qquad \cos\beta = \mathrm{cn}\, b, \qquad \Delta\beta = \mathrm{dn}\, b,$$

la formule (9) devient

$$\frac{d\,\mathrm{am}\, b}{db} = \mathrm{dn}\, b;$$

donc

$$(11) \quad \frac{d\,\mathrm{sn}\, b}{db} = \mathrm{cn}\, b\, \mathrm{dn}\, b, \qquad \frac{d\,\mathrm{cn}\, b}{db} = -\mathrm{sn}\, b\, \mathrm{dn}\, b, \qquad \frac{d\,\mathrm{dn}\, b}{db} = -k^2 \mathrm{sn}\, b\, \mathrm{cn}\, b.$$

8. *Théorème relatif aux fonctions elliptiques.* — Les formules données dans le numéro précédent et les formules analogues pour $w = \frac{\pi a}{2\mathrm{K}}$ transforment le théorème I en un autre, relatif aux fonctions elliptiques. Conformément aux quatre cas du théorème I, on obtient aussi quatre systèmes de formules dont je n'établirai que celui qui correspond au premier cas du théorème I, c'est-à-dire aux valeurs

$$e = +1, \qquad \varepsilon = +1; \qquad s = 0, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = 1, \qquad s_3 = 3.$$

Les trois autres systèmes qui correspondent aux cas 2, 3 et 4 du théorème I en proviennent si l'on y remplace les arguments a et b respectivement par

$$a + i\mathrm{K}', \quad a + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \quad a + \mathrm{K}; \quad b + i\mathrm{K}', \quad b + \mathrm{K} + i\mathrm{K}', \quad b + \mathrm{K},$$

où

$$(12)\qquad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2\beta}}.$$

D'après cela, on déduit du théorème I, si l'on y substitue a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3 par a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1, et si l'on pose

$$p_h = p_h^a\, da + p_h^b\, db,$$
$$c_h = c_h^a\, da + c_h^b\, db,$$

le théorème :

III. *Soient a et b deux arguments quelconques, k, k' les modules, pour lesquels*

$$k^2 + k'^2 = 1$$

et $i = \sqrt{-1}$. Alors les fonctions elliptiques sont liées aux éléments d'un système orthogonal de la manière suivante :

$$\frac{c_1^a + ic_2^a}{a_{13} + ia_{23}} = ik\,\mathrm{sn}(a+b), \qquad \frac{c_1^a - ic_2^a}{a_{13} - ia_{23}} = ik\,\mathrm{sn}(a-b),$$
$$\frac{a_{11} + ia_{21}}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a+b), \qquad \frac{a_{11} - ia_{21}}{a_{13} - ia_{23}} = -\frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}(a-b),$$
$$\frac{a_{12} + ia_{22}}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{i}{k'}\,\mathrm{dn}(a+b); \qquad \frac{a_{12} - ia_{22}}{a_{13} - ia_{23}} = -\frac{i}{k'}\,\mathrm{dn}(a-b);$$

$$a_{31} = -\frac{1}{k'}\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{dn}\,b,$$
$$a_{32} = -\frac{ik}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{cn}\,b,$$
$$a_{33} = -k\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b;$$

$$p_1^a - a_{31}c_3^a = -i\frac{k^2}{k'}\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{cn}\,b = -i\frac{\partial a_{31}}{\partial b},$$
$$p_2^a - a_{32}c_3^a = \frac{k}{k'}\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = -i\frac{\partial a_{32}}{\partial b},$$
$$p_3^a - a_{33}c_3^a = ik\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,b\,\mathrm{dn}\,b = -i\frac{\partial a_{33}}{\partial b}.$$

Dans ces expressions on peut changer l'indice supérieur a en b, si l'on change aussi l'argument a en b.

Pour montrer une seule application immédiate de ce fécond théorème qui fournit la théorie complète des fonctions elliptiques, je vais en déduire les théorèmes suivants.

9. *Théorèmes d'addition des fonctions elliptiques.* — Si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $a_{13} - ia_{23}$, on obtient, eu égard aux identités $(\mathfrak{I}_1)$ et $(\mathfrak{I}'_1)$ du n° 5,

$$\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{a_{13}v_1^a + a_{23}v_2^a - i(a_{23}v_1^a - a_{13}v_2^a)}{1 - a_{33}^2} = -i\,\frac{\frac{\partial a_{33}}{\partial b} + \frac{\partial a_{33}}{\partial a}}{1 - a_{33}^2}$$

ou, d'après le théorème III,

$$\operatorname{sn}(a+b) = \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b}.$$

D'une façon analogue, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $v_1^a - iv_2^a$, on a

$$\frac{v_1^a + iv_2^a}{a_{13} + ia_{23}} = \frac{v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a}{-i\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial b} - \frac{\partial a_{33}}{\partial a}\right)}.$$

Or, en élevant au carré les trois dernières formules établies dans le théorème III, on trouve

$$(p_1^a - a_{31}v_3^a)^2 + (p_2^a - a_{32}v_3^a)^2 + (p_3^a - a_{33}v_3^a)^2 = -k^2(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b),$$

et comme on a, d'après les identités $(\mathfrak{I}_1)$,

$$p_1^a p_1^a + p_2^a p_2^a + p_3^a p_3^a = v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a + v_3^a v_3^a,$$

$$a_{31}p_1^a + a_{32}p_2^a + a_{33}p_3^a = v_3^a,$$

il résulte

$$v_1^a v_1^a + v_2^a v_2^a = -k^2(\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b).$$

Par conséquent, on obtient

$$\operatorname{sn}(a+b) = \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}.$$

En réunissant ces deux formules avec les deux autres que l'on obtient, si l'on multiplie le numérateur et le dénominateur de l'expression $\frac{c_1^a + ic_2^a}{a_{13} + ia_{23}}$ par $a_{11} - ia_{21}$ et par $a_{12} - ia_{22}$, on a enfin

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{sn}(a+b) &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn}^2 a - \operatorname{sn}^2 b}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}. \end{aligned}\right.$$

D'une manière tout à fait analogue, on déduit des expressions $\frac{a_{11} + ia_{21}}{a_{13} + ia_{23}}$, $\frac{a_{12} + ia_{22}}{a_{13} + ia_{23}}$, en multipliant leurs numérateurs et dénominateurs par $a_{11} - ia_{21}$, $a_{12} - ia_{22}$, $a_{13} - ia_{23}$, $c_1^a - c_2^a$, les relations suivantes :

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{cn}(a+b) &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b \operatorname{dn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{dn}^2 a \operatorname{dn}^2 b - k'^2}{k^2 (\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b)} \\ &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}; \end{aligned}\right.$$

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} \operatorname{dn}(a+b) &= \frac{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 a \operatorname{sn}^2 b} \\ &= \frac{\operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b \operatorname{cn} a}{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b - \operatorname{sn} b \operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} \\ &= \frac{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a \operatorname{cn} b \operatorname{dn} b + k'^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} b}{\operatorname{cn} a \operatorname{cn} b + \operatorname{sn} a \operatorname{dn} a \operatorname{sn} b \operatorname{dn} b} \\ &= \frac{k^2 \operatorname{cn}^2 a \operatorname{cn}^2 b + k'^2}{\operatorname{dn} a \operatorname{dn} b + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{cn} a \operatorname{sn} b \operatorname{cn} b}. \end{aligned}\right.$$

10. *Intégrales elliptiques de deuxième et de troisième espèce.* — D'après l'identité (ϑ'_4), on a

$$\frac{\partial v_3^w}{\partial x} - \frac{\partial v_3^x}{\partial w} = -v_1^w v_2^x + v_2^w v_1^x = \frac{(v_1^w + iv_2^w)(v_1^x - iv_2^x) - (v_1^w - iv_2^w)(v_1^x + iv_2^x)}{2i}.$$

Or le théorème I fournit les expressions

$$v_3^w = -i\frac{\vartheta'_s(x)}{\vartheta_s(x)} - i\frac{\partial \log \mathcal{F}}{\partial w}, \qquad v_3^x = -i\frac{\vartheta'_s(w)}{\vartheta_s(w)} - i\frac{\partial \log \mathcal{F}}{\partial x}$$

$$(s = 0, 1, 2, 3),$$

$$v_1^w + iv_2^w = \quad v_1^x + iv_2^x = e\mathcal{F}\frac{\vartheta'_1(0)\vartheta_1(w+x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)},$$

$$v_1^w - iv_2^w = -(v_1^x - iv_2^x) = (-1)^{s+1} e\mathcal{F}^{-1}\frac{\vartheta'_1(0)\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s(w)\vartheta_s(x)};$$

par conséquent, on a

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta'_s(x)}{\vartheta_s(x)} - \frac{d}{dw}\frac{\vartheta'_s(w)}{\vartheta_s(w)} = (-1)^s \frac{\vartheta'^2_1(0)\vartheta_1(w+x)\vartheta_1(w-x)}{\vartheta_s^2(w)\vartheta_s^2(x)}$$

$$(s = 0, 1, 2, 3).$$

Comme on a aussi

$$\frac{d}{dw}\frac{\vartheta'_s(w)}{\vartheta_s(w)} = \frac{\vartheta''_s(w)}{\vartheta_s(w)} - \left[\frac{\vartheta'_s(w)}{\vartheta_s(w)}\right]^2,$$

on tire de la dernière formule, pour $s = 0$ et $w = 0$,

$$\frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} - \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} = -\frac{\vartheta'^2_1(0)\vartheta_1^2(x)}{\vartheta^2(0)\vartheta^2(x)}$$

ou, d'après les formules (2), (8), (8*),

$$\frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)} - \frac{d}{dx}\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \vartheta_3^4(0)(1 - \Delta^2\beta).$$

En multipliant cette relation (*voir* n° **7**) par

$$(16) \qquad dx = \frac{d\beta}{\vartheta_3^2(0)\Delta\beta} = \frac{\pi}{2K}\frac{d\beta}{\Delta\beta}$$

et en intégrant, on obtient

$$(17) \qquad \frac{\vartheta''(0)}{\vartheta(0)}x - \frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)} = \frac{2K}{\pi}[F(\beta) - E(\beta)],$$

où

$$(18) \qquad E(\beta) = \int_0^\beta \Delta\beta \, d\beta.$$

Pour déduire le théorème d'addition de l'intégrale de deuxième espèce et pour établir en même temps l'inversion des intégrales elliptiques de troisième espèce, j'emploie les identités $(\mathfrak{I}'_1)$.

On déduit de ces identités d'abord

$$d(a_{1h} \pm ia_{2h}) = \pm i(a_{1h} \pm ia_{2h})v_3 \mp ia_{3h}(v_1 \pm iv_2);$$

en divisant par $a_{1h} \pm ia_{2h}$, on obtient de plus

$$(\mathfrak{I}'_3) \qquad d\log(a_{1h} \pm ia_{2h}) = \pm iv_3 \mp ia_{3h}\frac{v_1 \pm iv_2}{a_{1h} \pm ia_{2h}}$$

et

$$d\log\frac{a_{1h} - ia_{2h}}{a_{1h} + ia_{2h}} = -2iv_3 + ia_{3h}\left(\frac{v_1 + iv_2}{a_{1h} + ia_{2h}} + \frac{v_1 - iv_2}{a_{1h} - ia_{2h}}\right);$$

d'où suit enfin, au moyen de l'identité $(\mathfrak{I}_1)$,

$$(\mathfrak{I}'_4) \qquad \tfrac{1}{2}d\log\frac{a_{1h} - ia_{2h}}{a_{1h} + ia_{2h}} + iv_3 = ia_{3h}\frac{p_3 - a_{3h}v_3}{1 - a_{3h}^2}.$$

Si l'on applique [1] aux premiers membres des identités $(\mathfrak{I}'_3)$, $(\mathfrak{I}'_4)$ le théorème I et aux seconds membres de ces identités le théorème III.

---

[1] Pour faire cette application, on se souviendra que les quantités a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}; p_1, p_2, p_3 dans le théorème I correspondent aux quantités a_{m2}, a_{m3}, a_{m1}; p_2, p_3, p_1 dans le théorème III. Par conséquent, on prendra, dans les premiers membres des identités $(\mathfrak{I}'_3)$, $(\mathfrak{I}'_4)$, auxquels on applique le théorème I, l'indice $h = 2$, et dans les seconds membres, auxquels on applique le théorème III, l'indice $h = 3$.

J'ai introduit ce léger changement de la notation pour obtenir un accord absolu, d'une part, entre les formules du théorème I et les formules de mes recherches antérieures (*Comptes rendus*, t. CVII, p. 859, 901; *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII) dont le théorème I forme la généralisation; et, d'autre part, entre les formules des théorèmes II et III. Dans les formules du théorème II, relatives aux fonctions σ_h, ce changement de la notation m'a paru nécessaire, afin d'obtenir les mêmes indices pour les coefficients du système orthogonal et pour les fonctions sigma.

on obtient, sans aucun calcul, les deux formules suivantes

$$(19)\quad -\frac{\vartheta'(w+x)}{\vartheta(w+x)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}+\frac{\vartheta'(x)}{\vartheta(x)}=\frac{2K}{\pi}k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b),$$

$$(20)\quad \frac{1}{2}\frac{d}{dx}\log\frac{\vartheta(x-w)}{\vartheta(x+w)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}=\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\,\mathrm{sn}^2 b}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b}.$$

On déduit des formules (17) et (19)

$$(21)\quad E(\mathrm{am}\,a)+E(\mathrm{am}\,b)-E[\mathrm{am}(a+b)]=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{sn}\,b\,\mathrm{sn}(a+b),$$

et de la formule (20), par l'intégration,

$$\frac{1}{2}\log\frac{\vartheta(x-w)}{\vartheta(x+w)}+\frac{\vartheta'(w)}{\vartheta(w)}x=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\int_0^b\frac{\mathrm{sn}^2 b\,db}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2 b},$$

où

$$x=\frac{\pi b}{2K},\qquad w=\frac{\pi a}{2K}.$$

La première de ces formules représente le théorème d'addition des intégrales elliptiques de deuxième espèce, et la seconde formule établit l'inversion des intégrales elliptiques de troisième espèce. Pour donner à cette formule une autre forme, je change légèrement la notation, en écrivant au lieu de b la lettre $\mathfrak{u}$, et en posant

$$\vartheta\left(\frac{\pi\mathfrak{u}}{2K}\right)=\Theta(\mathfrak{u}),\qquad \vartheta\left(\frac{\pi a}{2K}\right)=\Theta(a),\qquad \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)}=Z(a).$$

Alors la dernière formule prend la forme

$$(22)\quad \frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\mathfrak{u}-a)}{\Theta(\mathfrak{u}+a)}+Z(a)\mathfrak{u}=k^2\,\mathrm{sn}\,a\,\mathrm{cn}\,a\,\mathrm{dn}\,a\int_0^{\mathfrak{u}}\frac{\mathrm{sn}^2\mathfrak{u}\,d\mathfrak{u}}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2 a\,\mathrm{sn}^2\mathfrak{u}}=\Pi(\mathfrak{u},a),$$

d'où résulte

$$(23)\qquad \Pi(\mathfrak{u},a)-\Pi(a,\mathfrak{u})=\mathfrak{u}\,Z(a)-a\,Z(\mathfrak{u}).$$

Si l'on pose dans la formule (22) $\mathfrak{u}$ successivement égal à $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2$, on obtient

$$(24)\quad \Pi(\mathfrak{u}_1,a)+\Pi(\mathfrak{u}_2,a)-\Pi(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2,a)=\frac{1}{2}\log\frac{\Theta(\mathfrak{u}_1-a)\Theta(\mathfrak{u}_2-a)\Theta(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2+a)}{\Theta(\mathfrak{u}_1+a)\Theta(\mathfrak{u}_2+a)\Theta(\mathfrak{u}_1+\mathfrak{u}_2-a)}.$$

Le second membre de cette relation représente la seule expression qui ne peut être transformée immédiatement au moyen des théorèmes précédents, comme contenant plus de deux arguments. Pour transformer ce second membre, je reprends les formules fondamentales ($\mathfrak{A}$), établies dans le n° **2**. Les deux premières formules ($\mathfrak{A}$) peuvent être résumées ainsi :

$$\mathfrak{Z}(w)\mathfrak{Z}(x) + e\,\mathfrak{Z}_1(w)\mathfrak{Z}_1(x) = \mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2,$$

où $e = \pm 1$ et

$$\mathfrak{L}_1 = \mathfrak{Z}_3(w+x, q^2) - e\,\mathfrak{Z}_2(w+x, q^2),$$
$$\mathfrak{L}_2 = \mathfrak{Z}_3(w-x, q^2) + e\,\mathfrak{Z}_2(w-x, q^2).$$

D'une façon analogue, on a

$$\mathfrak{Z}(y)\mathfrak{Z}(z) + e\,\mathfrak{Z}_1(y)\mathfrak{Z}_1(z) = \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2,$$
$$\mathfrak{Z}(w'')\mathfrak{Z}(x'') + e\,\mathfrak{Z}_1(w'')\mathfrak{Z}_1(x'') = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_2,$$
$$\mathfrak{Z}(y'')\mathfrak{Z}(z'') + e\,\mathfrak{Z}_1(y'')\mathfrak{Z}_1(z'') = \mathfrak{L}_2\mathfrak{M}_1,$$

où les expressions $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ proviennent des expressions $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$, si l'on y échange w, x en y, z, et où

$$\begin{cases} 2w'' = w + x + y - z, & 2y'' = w - x + y + z, \\ 2x'' = w + x - y + z, & 2z'' = -w + x + y + z. \end{cases}$$

Comme $\mathfrak{L}_1\mathfrak{L}_2 . \mathfrak{M}_1\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{L}_1\mathfrak{M}_2 . \mathfrak{L}_2\mathfrak{M}_1$, le produit

$$[\mathfrak{Z}(w)\mathfrak{Z}(x) + e\mathfrak{Z}_1(w)\mathfrak{Z}_1(x)]\,[\mathfrak{Z}(y)\mathfrak{Z}(z) + e\,\mathfrak{Z}_1(y)\mathfrak{Z}_1(z)]$$

ne change pas si l'on y remplace w, x, y, z par w'', x'', y'', z'' [1]. Par

---

[1] On reconnaît immédiatement que cette proposition ne diffère que légèrement du théorème fondamental de Jacobi (*Œuvres complètes*, t. I, p. 506), communiqué dans une lettre à M. Hermite (*Journal de Crelle*, t. 32, p. 177; *Œuvres complètes*, t. II, p. 116) et devenu la base d'une théorie élémentaire des fonctions elliptiques (*Œuvres complètes*, t. I, p. 499). La démonstration, donnée au texte, met en évidence que *ce célèbre théorème se déduit d'un simple changement des facteurs d'un produit algébrique*; j'ajoute que l'on peut déduire, d'une façon analogue, aussi sa généralisation relative aux fonctions thêta de deux

conséquent, si l'on pose $w'' = 0$, d'où suit

$$x'' = w + x, \qquad y'' = w + y, \qquad z'' = x + y, \qquad z = w + x + y,$$

on a

$$\begin{aligned}\vartheta(0)\vartheta(w+x)\vartheta(w+y)\vartheta(x+y) = {} & \vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(w+x+y) \\ & + \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(w+x+y)\end{aligned}$$

et, en remplaçant x et y par $-x$ et $-y$, on trouve par division

$$\frac{\vartheta(w-x)\vartheta(w-y)}{\vartheta(w+x)\vartheta(w+y)} = \frac{\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(w-x-y) + \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(w-x-y)}{\vartheta(w)\vartheta(x)\vartheta(y)\vartheta(w+x+y) + \vartheta_1(w)\vartheta_1(x)\vartheta_1(y)\vartheta_1(w+x+y)}.$$

En prenant dans cette formule

$$w = \frac{\pi a}{2K}, \qquad x = \frac{\pi u_1}{2K}, \qquad y = \frac{\pi u_2}{2K},$$

on en déduit

$$(25) \quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\Theta(u_1 - a)\Theta(u_2 - a)\Theta(u_1 + u_2 + a)}{\Theta(u_1 + a)\Theta(u_2 + a)\Theta(u_1 + u_2 - a)} \\ & \quad = \frac{1 - k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2 - a)}{1 + k^2 \operatorname{sn} a \operatorname{sn} u_1 \operatorname{sn} u_2 \operatorname{sn}(u_1 + u_2 + a)} = \mathfrak{P}(u_1, u_2, a).\end{aligned}\right.$$

Donc le théorème d'addition des intégrales elliptiques de troisième espèce, relatif aux arguments u_1, u_2, est représenté par la formule

$$(26) \quad \Pi(u_1, a) + \Pi(u_2, a) - \Pi(u_1 + u_2, a) = \tfrac{1}{2}\log\mathfrak{P}(u_1, u_2, a).$$

D'une façon analogue, on obtient, à l'aide des formules (21), (22), (23) la relation

$$(27) \quad \left\{\begin{aligned} & \Pi(u, a_1) + \Pi(u, a_2) - \Pi(u, a_1 + a_2) \\ & \quad = u k^2 \operatorname{sn} a_1 \operatorname{sn} a_2 \operatorname{sn}(a_1 + a_2) + \tfrac{1}{2}\log\mathfrak{P}(a_1, a_2, u),\end{aligned}\right.$$

---

arguments, dont M. Rosenhain a tiré la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce; et même les théorèmes corrélatifs pour les fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments (*voir* mes travaux : *Comptes rendus*, t. CIV, p. 1094, 1255; *Math. Ann.*, t. XXVIII, p. 493; t. XXX, p. 571).

qui représente le théorème d'addition des intégrales elliptiques de troisième espèce, relatif aux paramètres.

11. *Fonction* $\wp(u)$. *Relations entre les fonctions sigma* [1].

Après avoir établi les formules fondamentales, relatives aux fonctions thèta, il reste à examiner les fonctions sigma. Comme ces recherches sont tout à fait analogues aux précédentes, je me borne à déduire les relations les plus importantes, en introduisant la fonction $\wp(u)$ de M. Weierstrass.

D'après le théorème II, on a

$$v_3 = -i\left[\frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\,du + \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\,dv + d\log G\right],$$

d'où suit

$$d\log G = \left[iv_3^u - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\right]du + \left[iv_3^v - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right]dv.$$

Comme le premier membre de cette relation est une différentielle exacte, on obtient

$$\frac{\partial}{\partial v}\left[iv_3^u - \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)}\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[iv_3^v - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}\right].$$

Si l'on introduit, d'après M. Weierstrass, la fonction $\wp(u)$, définie par la formule

$$\wp(u) = -\frac{d^2\log\sigma(u)}{du^2} = -\frac{d}{du}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)},$$

on tire de la dernière relation

$$i\left(\frac{\partial v_3^u}{\partial v} - \frac{\partial v_3^v}{\partial u}\right) = \wp(u) - \wp(v).$$

Or on a, d'après l'identité $(\mathfrak{I}_2')$,

$$\begin{aligned} i\left(\frac{\partial v_3^u}{\partial v} - \frac{\partial v_3^v}{\partial u}\right) &= -i(v_1^u v_2^v - v_2^u v_1^v) \\ &= \tfrac{1}{2}\left[(v_1^u + iv_2^u)(v_1^v - iv_2^v) - (v_1^u - iv_2^u)(v_1^v + iv_2^v)\right] \end{aligned}$$

---

(1) *Voir* Schwarz, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen*; Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, 1886.

et, d'après le théorème II,

$$c_1^u + ic_2^u = \quad c_1^v + ic_2^v = \mathfrak{G} \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)},$$

$$c_1^u - ic_2^u = -(c_1^v - ic_2^v) = \mathfrak{G}^{-1} \frac{\sigma(u-v)}{\sigma(u)\sigma(v)};$$

donc on a la relation fondamentale [1]

$$(28) \qquad \mathfrak{p}(u) - \mathfrak{p}(v) = -\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}.$$

Si l'on pose maintenant

$$(29) \qquad \omega = \lambda K, \qquad \omega' = \lambda K' i,$$

λ étant une constante, on a (*voir* Jacobi, *Œuvr. compl.*, t. I, p. 525)

$$\frac{\pi\omega'}{2\omega} = \frac{\pi K' i}{2K} = -\tfrac{1}{2} i \log q.$$

A l'aide de cette formule et à l'aide des relations

$$\vartheta_1(x + \tfrac{1}{2}\pi) = \vartheta_2(x), \qquad \vartheta_1(x - \tfrac{1}{2} i \log q) = iq^{-\frac{1}{4}} e^{-wi} \vartheta(x),$$

$$\vartheta_1(x + \tfrac{1}{2}\pi - \tfrac{1}{2} i \log q) = q^{-\frac{1}{4}} e^{-wi} \vartheta_3(x),$$

on déduit des définitions ($\mathfrak{D}$) des fonctions sigma, établies dans le n° 4, les définitions suivantes

$$(\mathfrak{D}_1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sigma_1(u) &= e^{-\eta_1 u} \frac{\sigma(u+\omega)}{\sigma(\omega)} = -e^{\eta_1 u} \frac{\sigma(u-\omega)}{\sigma(\omega)}, \\ \sigma_2(u) &= e^{-\eta_1'' u} \frac{\sigma(u+\omega'')}{\sigma(\omega'')} = -e^{\eta_1'' u} \frac{\sigma(u-\omega'')}{\sigma(\omega'')}, \\ \sigma_3(u) &= e^{-\eta_1' u} \frac{\sigma(u+\omega')}{\sigma(\omega')} = -e^{\eta_1' u} \frac{\sigma(u-\omega')}{\sigma(\omega')}. \end{aligned} \right.$$

---

[1] Si l'on emploie au lieu des fonctions sigma, les fonctions thêta, les identités dont j'ai fait usage fournissent les formules que M. Scheibner a données dans un très beau Mémoire (voir *Math. Ann.*, t. XXXIV, p. 502).

où

$$\omega'' = \omega + \omega', \qquad \eta'' = \eta + \eta', \qquad \eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \qquad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}.$$

Si l'on introduit de plus, d'après M. Weierstrass,

$$s = \wp(u), \qquad e_1 = \wp(\omega), \qquad e_2 = \wp(\omega + \omega'), \qquad e_3 = \wp(\omega').$$

au moyen des définitions (ω_1), on déduit de la formule (28)

$$(30) \quad s - e_h = \frac{\sigma_h^2(u)}{\sigma^2(u)}, \qquad \sqrt{\wp(u) - e_h} = \frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)} \qquad (h = 1, 2, 3).$$

Ceci établi, je pose pour l'instant

$$\mathfrak{M}_h = \frac{\sigma'_h(v)}{\sigma_h(v)}\, du + \frac{\sigma'_h(u)}{\sigma_h(u)}\, dv + d \log \mathfrak{G};$$

alors on a (*voir* n° 4)

$$p_h = -\, i a_{3h} \mathfrak{M}_h,$$

$$d a_{3h} = \quad i a_{3h} a_{3l} (\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_l),$$

$$d \log a_{3h} = i \frac{a_{3k} a_{3l}}{a_{3h}} (\mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_l).$$

et, par conséquent, d'après le théorème II,

$$(\alpha') \quad \frac{\sigma'_h(u)}{\sigma_h(u)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\varepsilon_k \varepsilon_l}{\varepsilon_h} \frac{\sigma_k(u)\,\sigma_l(u)\,\sigma_k(v)\,\sigma_l(v)}{\sigma_h(u)\,\sigma(u)\,\sigma_h(v)\,\sigma(v)} \left[\frac{\sigma'_k(v)}{\sigma_k(v)} - \frac{\sigma'_l(v)}{\sigma_l(v)} \right].$$

Pour $u = 0$, on en tire

$$(\alpha) \qquad \frac{\sigma'_k(v)}{\sigma_k(v)} - \frac{\sigma'_l(v)}{\sigma_l(v)} = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_k \varepsilon_l} \frac{\sigma_h(v)\,\sigma(v)}{\sigma_k(v)\,\sigma_l(v)},$$

et, si l'on porte cette formule dans la relation (α'), on obtient

$$(31) \qquad \frac{\sigma'_h(u)}{\sigma_h(u)} - \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\sigma_k(u)\,\sigma_l(u)}{\sigma_h(u)\,\sigma(u)}.$$

Si l'on remplace dans cette formule l'indice h par k et l et si l'on retranche les deux formules qui en proviennent, on a

$$\frac{\sigma'_k(u)}{\sigma_k(u)} - \frac{\sigma'_l(u)}{\sigma_l(u)} = -\frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)}\left[\frac{\sigma_l^2(u) - \sigma_k^2(u)}{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}\right],$$

on, d'après la formule (30),

$$(32) \qquad \frac{\sigma'_k(u)}{\sigma_k(u)} - \frac{\sigma'_l(u)}{\sigma_l(u)} = -(e_k - e_l)\frac{\sigma_h(u)\sigma(u)}{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}.$$

En comparant cette formule avec la formule (α), on a

$$\frac{\varepsilon_h}{\varepsilon_k \varepsilon_l} = -(e_k - e_l),$$

d'où suit

$$(33) \qquad \left\{\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\sqrt{e_3 - e_1}\sqrt{e_1 - e_2}}, \\ \varepsilon_2 &= -\frac{1}{\sqrt{e_1 - e_2}\sqrt{e_2 - e_3}}, \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\sqrt{e_2 - e_3}\sqrt{e_3 - e_1}}, \end{aligned}\right.$$

les racines carrées prises avec le signe positif.

A l'aide de la formule (31), on obtient encore

$$(34) \qquad \frac{d}{du}\frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)} = -\frac{\sigma_k(u)\sigma_l(u)}{\sigma^2(u)},$$

$$(35) \qquad p_h^u - a_{3h}s_3^u = -\frac{\varepsilon_h \sigma_k(u)\sigma_l(u)}{\sigma^2(u)}\frac{\sigma_h(v)}{\sigma(v)} = -i\frac{\partial a_{3h}}{\partial v}.$$

Eu égard aux formules (30), la formule (34) prend les formes

$$(36) \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{ds}{du} &= -2\sqrt{(s - e_1)(s - e_2)(s - e_3)}, \\ p'(u)^2 &= 4|p(u) - e_1||p(u) - e_2||p(u) - e_3|. \end{aligned}\right.$$

D'après le théorème II, on a

$$\frac{a_{1h}+ia_{2h}}{v_1^u+iv_2^u}=-\varepsilon_h\frac{\sigma_h(u+v)}{\sigma(u+v)}=-\varepsilon_h\sqrt{\wp(u+v)-e_h},$$

$$v_1^u v_1^u+v_2^u v_2^u=(v_1^u+iv_2^u)(v_1^u-iv_2^u)$$

$$=\frac{\sigma(u+v)\sigma(u-v)}{\sigma^2(u)\sigma^2(v)}=-[\wp(u)-\wp(v)].$$

Par conséquent, l'identité (*voir* n° **9**)

$$\frac{a_{1h}+ia_{2h}}{v_1^u+iv_2^u}=\frac{-i\left(\dfrac{\partial a_{3h}}{\partial v}-\dfrac{\partial a_{3h}}{\partial u}\right)}{v_1^u v_1^u+v_2^u v_2^u}$$

se transforme, eu égard d'ailleurs aux formules (30) et (35), en la suivante

$$\sqrt{\wp(u+v)-e_h}$$
$$=\frac{\sqrt{[\wp(u)-e_h][\wp(v)-e_k][\wp(v)-e_l]}-\sqrt{[\wp(v)-e_h][\wp(u)-e_k][\wp(u)-e_l]}}{\wp(u)-\wp(v)}$$

qui représente, sous une forme irrationnelle, le théorème d'addition pour la fonction $\wp(u)$. En élevant cette formule au carré, on trouve, après quelques calculs simples,

$$\wp(u+v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2-\wp(u)-\wp(v)+(e_1+e_2+e_3).$$

Le premier membre de la formule (36)

$$\frac{ds}{du}=-2\sqrt{(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)}$$

ne change pas si l'on ajoute à s une constante. Or on peut déterminer cette constante de façon que la forme $(s-e_1)(s-e_2)(s-e_3)$ soit une forme réduite, c'est-à-dire que $e_1+e_2+e_3$ soit égal à zéro. Par conséquent on peut supposer que

$$e_1+e_2+e_3=0.$$

Alors le théorème d'addition de la fonction $\wp(u)$ prend la forme plus simple

$$(37)\qquad \wp(u+v)+\wp(u)+\wp(v)=\frac{1}{4}\left[\frac{\wp'(u)-\wp'(v)}{\wp(u)-\wp(v)}\right]^2,$$

et la formule (36) devient

$$(38)\qquad du=-\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}},$$

où

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} &e_1+e_2+e_3=0,\\ &e_2e_3+e_3e_1+e_1e_2=-\tfrac{1}{2}(e_1^2+e_2^2+e_3^2)=-\tfrac{1}{4}g_2,\\ &e_1e_2e_3=\tfrac{1}{4}g_3.\end{aligned}\right.$$

D'après les définitions (Ⓓ) (*voir* n° **4**), on a

$$(\mathcal{D}_2)\qquad \frac{\sigma_h(u)}{\sigma(u)}=\frac{\pi}{2\omega}\,\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_\nu(0)}\,\frac{\vartheta_\nu(w)}{\vartheta_1(w)},$$

où

$$\omega=\lambda K,\qquad w=\frac{u\pi}{2\omega}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\pi u}{2K},$$

et où aux indices $h=1, 2, 3$ correspondent respectivement les indices $\nu=2, 3, 0$. Par conséquent, si l'on prend $h=3, \nu=0, u=\omega, w=\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$\frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{\pi}{2K}\,\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\vartheta(0)\,\vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{\vartheta_3^2(0)}\,\frac{\vartheta_1'(0)\,\vartheta_3(0)}{\vartheta(0)\,\vartheta_2(0)}$$

ou, d'après la formule (2) (n° **6**),

$$\frac{\sigma_3(\omega)}{\sigma(\omega)}=\frac{1}{\lambda}$$

et, d'après la formule (30),

$$\sqrt{e_1-e_3}=\frac{1}{\lambda};$$

donc la formule (29) devient

$$(40)\qquad \omega\sqrt{e_1-e_3}=\mathrm{K},\qquad \omega'\sqrt{e_1-e_3}=\mathrm{K}'i.$$

Au moyen de cette formule, la définition ($\mathfrak{D}_2$) donne, pour $h=3$, $\nu=0$,

$$\frac{\sigma_3(u)}{\sigma(u)}=\sqrt{e_1-e_3}\,\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}\,\frac{\vartheta\left(\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\sqrt{e_1-e_3}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\mathrm{K}}\sqrt{e_1-e_3}\right)}=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\mathrm{sn}(u\sqrt{e_1-e_3})}$$

(*voir* n° **7**).

En prenant encore $h=1$, $\nu=2$; $h=2$, $\nu=3$, on déduit de la définition ($\mathfrak{D}_2$), au moyen des formules, établies dans le n° **7**,

$$(41)\qquad \left\{\begin{aligned}
\mathrm{sn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{e_1-e_3}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},\\
\mathrm{cn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_1}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},\\
\mathrm{dn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)&=\frac{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_2}}{\sqrt{\mathrm{p}(u)-e_3}},
\end{aligned}\right.$$

où j'ai ajouté, dans la notation des fonctions elliptiques, le module dont elles dépendent.

Au moyen de la définition $\mathrm{dn}^2 a=1-k^2\mathrm{sn}^2 a$, on déduit encore des formules (41)

$$(42)\qquad k=\frac{\sqrt{e_2-e_3}}{\sqrt{e_1-e_3}},\qquad k'=\frac{\sqrt{e_1-e_2}}{\sqrt{e_1-e_3}}.$$

Enfin comme $\mathrm{sn}(u\sqrt{e_1-e_3},\ k)$ s'annule pour $u=0$, il résulte de la première formule (41), que $\mathrm{p}(u)=s$ devient ∞ pour $u=0$; donc on tire de la formule (38)

$$(43)\qquad u=\int_s^\infty\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}.$$

L'expression différentielle

$$\frac{ds}{\sqrt{4s^3-g_2s-g_3}}$$

peut être transformée, au moyen de la substitution

$$s = \frac{\delta y - \beta}{\alpha - \gamma y}, \qquad y = \frac{\alpha s + \beta}{\gamma s + \delta},$$

α, β, γ, δ étant des constantes, en l'expression

$$\frac{dy}{\sqrt{f(y)}},$$

où

$$\begin{aligned} f(y) &= \mathfrak{A} y^4 + 4\mathfrak{B} y^3 + 6\mathfrak{C} y^2 + 4\mathfrak{D} y + \mathfrak{E} \\ &= \mathfrak{A}(y-a)(y-b)(y-c)(y-d). \end{aligned}$$

Dans une lettre, datée du 6 septembre 1887, dont M. Hermite a bien voulu m'honorer, l'illustre géomètre a établi pour l'expression y plusieurs formes bien élégantes; on les trouve dans une Note publiée dans le tome V de ce Journal, page 73, formules (8), (9), (10).

12. *Fonctions doublement périodiques de seconde espèce. Remarques finales.* — Dans les recherches précédentes, ni la fonction $\mathfrak{F}$ du théorème I, ni la fonction $\mathfrak{G}$ du théorème II n'ont joué un rôle essentiel. Cependant pour l'examen de problèmes plus élevés, il est important que des fonctions quelconques entrent dans les formules des théorèmes cités. Pour en donner un exemple, je vais aborder rapidement les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, découvertes par M. Hermite.

Dans son admirable Ouvrage : *Sur quelques applications des fonctions elliptiques* (Paris, Gauthier-Villars; 1885), M. Hermite, en examinant le problème de la rotation (voir *loc. cit.*, n^{os} X,..., XX), a introduit (à partir du n° XXIII) les fonctions doublement périodiques de seconde espèce

$$\Phi_s = \frac{i\theta_1'(0)\,\theta_s(u+a)\,e^{\lambda u - \nu}}{\sigma\theta_{1-s}(a)\,\theta_0(u)} \qquad (s = 0, 1, 2, 3).$$

Dans cette expression λ et ν sont des constantes; σ est une racine

quatrième de l'unité et les fonctions θ sont définies par les équations

$$\theta_s(u) = \vartheta_s(x), \qquad \theta_s(a) = \vartheta_s(w), \qquad x = \frac{2K}{\pi} u, \qquad w = \frac{2K}{\pi} a.$$

Si l'on prend $s = 1$, on a

$$\Phi_1 = \frac{i\theta'_1(0)\,\theta_1(u+a)\,e^{\lambda u+\nu}}{\theta_0(a)\,\theta_0(u)},$$

expression qui met en évidence que Φ_1 devient égal à la quantité $v_1^u + iv_2^u$ du théorème I, si l'on y pose $s = 0$, $e = 1$, $w = \text{const.}$, $dw = 0$, et

$$\bar{\mathcal{X}} = ie^{\lambda u+\nu}.$$

De plus on voit que, dans ce cas [1],

$$iv_3^u = \lambda + D_a \log\theta_0(a) = \varepsilon_1,$$

et que les quantités $a_{11} + ia_{21}$, $a_{12} + ia_{22}$, $a_{13} + ia_{23}$ deviennent, sauf des constantes, les fonctions Φ_3, Φ_0, Φ_2. Enfin, on voit que les coefficients a_{31}, a_{32}, a_{33} et, par conséquent, aussi les quantités p_1^u, p_2^u, p_3^u deviennent, sauf des constantes, égales aux quantités $U_1 = ik\,\mathrm{cn}\,u$, $U_2 = k\,\mathrm{sn}\,u$, $U_3 = i\,\mathrm{dn}\,u$, introduites par M. Hermite (voir *loc. cit.*, n° XXV).

D'une façon analogue, on obtient, en augmentant convenablement l'argument w ou a, la proposition plus générale :

Les fonctions doublement périodiques de seconde espèce Φ_s, Φ_{1-s}, Φ_{2+s}, Φ_{3-s} $(s = 0, 1, 2, 3)$, *où les indices inférieurs sont pris suivant le module* 4, *et les expressions* ε_s, U_1, U_2, U_3, *découvertes et introduites par M. Hermite dans sa théorie desdites fonctions, sont proportionnelles aux éléments d'un système orthogonal, savoir :* $v_1^u + iv_2^u$, $a_{12} + ia_{22}$, $a_{11} + ia_{21}$, $a_{13} + ia_{23}$; v_3^u; a_{31} *ou* p_1^u, a_{32} *ou* p_2^u, a_{33} *ou* p_3^u.

---

(1) Hermite, *loc. cit.*, n° XXIII.

La proposition précédente n'est pas liée seulement aux importants *résultats* de M. Hermite, mais encore plus étroitement aux ingénieuses *méthodes* de cet illustre géomètre.

En poursuivant la voie, ouverte par Jacobi pour la résolution du problème de la rotation d'un corps solide, M. Hermite a réussi à exprimer, sous une forme extrêmement élégante, les neuf cosinus a_{mn} des angles formés par les angles rectangulaires fixes et mobiles et les composantes de la vitesse de rotation p, q, r; v, v', v'' au moyen des fonctions thêta. Dans ces expressions entrent deux arguments, dont l'un reste constant et dont l'autre est une fonction linéaire du temps. En sachant par mes recherches, relatives aux fonctions thêta de deux arguments (*Journal de Borchardt*, t. 94; *Comptes rendus*, 1887), que les produits de ces fonctions forment les seize coefficients d'un système orthogonal, *quelles que soient les deux paires d'arguments qui y entrent*, j'ai été conduit à examiner la question, si les résultats de M. Hermite restent encore valables sous la condition que les deux arguments, dont les fonctions thêta dépendent, sont quelconques. Après avoir trouvé que c'est le cas, la méthode de M. Hermite, employée à un problème de Mécanique, pouvait être aussi appliquée à l'Analyse, c'est-à-dire à la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques de première espèce. On n'a besoin que de remplacer les quantités p, q, r; v, v', v'' par les quantités p_1, p_2, p_3; v_1, v_2, v_3 et de faire usage des identités qui existent entre p_h, $v_h (h = 1, 2, 3)$ et les différentielles da_{mn} $(m, n = 1, 2, 3)$.

C'est ainsi que j'ai étudié la théorie des fonctions elliptiques et des fonctions hyperelliptiques de première espèce, et que j'ai obtenu les résultats dont je me suis permis de proposer, dans ce Mémoire, les premières conséquences.

Si l'on emploie, au lieu des fonctions thêta, les fonctions sigma et si l'on pose, dans les formules du théorème II, l'argument v égal à une constante, et

$$\mathcal{G} = e^{-u\zeta(v)}, \qquad \zeta(v) = \frac{\sigma'(v)}{\sigma(v)},$$

les expressions $v_1^u + iv_2^u$ et $a_{1h} + ia_{2h}$ se transforment dans les fonctions

$$\varphi = \frac{\sigma(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)} e^{-u\zeta(v)},$$

$$\varphi_h = \frac{\sigma_h(u+v)}{\sigma(u)\sigma(v)} e^{-u\zeta(v)} \qquad (h = 1, 2, 3),$$

dont la fonction φ est employée, précisément sous cette forme, par M. Halphen, comme fonction doublement périodique de seconde espèce ([1]).

Or, pour les valeurs introduites de v et de φ, l'expression de v_3 s'annule; donc :

On obtient les propriétés algébriques et différentielles des fonctions φ et φ_h, dont la fonction φ est introduite comme fonction doublement périodique de seconde espèce par M. Halphen, si l'on pose, dans les identités du n° 5 et dans celles qui en proviennent, v_3 égal à zéro.

En terminant ce Mémoire, je me permets d'ajouter encore quelques remarques sur les différents points de vue sous lesquels les recherches précédentes peuvent être continuées.

D'abord on peut remplacer les fonctions thêta et sigma d'un seul argument par les fonctions correspondantes de deux arguments. Ainsi se déduit la théorie des fonctions hyperelliptiques de première espèce, d'une façon élémentaire et analogue à la méthode que j'ai exposée, pour les fonctions elliptiques, dans ce Mémoire ([2]).

De plus, on peut employer les éléments de deux systèmes orthogonaux pour en composer les éléments d'un troisième système orthogonal. En prenant pour les éléments des systèmes composants les expressions, formées par les différentes fonctions périodiques d'un ou de deux arguments, on obtient plusieurs systèmes composés. Les éléments de ces systèmes composants et composés sont liés entre eux par des relations algébriques et différentielles qui découlent, les unes et les autres, d'identités.

([1]) Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*. t. I, p. 230.

([2]) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CXI, p. 225.

Les relations différentielles conduisent à des équations totales et à dérivées partielles, dont on connaît les intégrales, formées par des fonctions périodiques. Ces équations sont précisément celles qui se présentent en Géométrie et en Mécanique, et sont devenues, dans le cas des fonctions doublement périodiques, d'après les célèbres recherches de M. Fuchs et de M. Hermite, l'objet des excellents travaux de MM. Appell, Brioschi, Gyldén, Halphen, Mittag-Leffler et Picard. Pour cela, l'examen détaillé desdites relations différentielles, qui offre un vaste champ de recherches, me paraît assez important pour le poursuivre. J'y reviendrai dans une autre occasion.

Qu'il me soit permis, en publiant ce Mémoire, d'offrir mes remerciements, aussi sincères que respectueux, à M. Hermite, qui a bien voulu m'aider, dans mes recherches, de ses précieux conseils et m'encourager par son bienveillant intérêt, dont je suis profondément reconnaissant à l'illustre géomètre.

Remarques sur certaines équations aux différences partielles d'ordre supérieur;

PAR M. AUGUST GUTZMER, A BERLIN.

Dans son *Mémoire sur l'équation aux différences partielles du quatrième ordre* $\Delta\Delta u = 0$ *et sur l'équilibre d'élasticité d'un corps solide* (¹), É. Mathieu a étudié l'équation

$$\Delta\Delta u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2} = 0,$$

obtenue en appliquant à l'expression

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

encore une fois l'opération indiquée par la caractéristique Δ, et ce géomètre a introduit la définition du second potentiel, fonction w de x, y, z qui satisfait à l'équation

$$\Delta\Delta w = 0,$$

(¹) *Journal de Mathématiques*, 2e série, t. XIV, p. 378-421; 1869. *Voir* aussi la *Théorie du potentiel et ses applications à l'Électrostatique et au Magnétisme*, du même auteur.

si le point (x, y, z) se trouve en dehors d'une masse distribuée dans un volume ω, et à l'équation

$$\Delta\Delta w = -8\pi\varrho(x, y, z),$$

si le point (x, y, z) est situé à l'intérieur de ω et où ϱ désigne la densité de la masse. En particulier, Mathieu s'est occupé du cas spécial où l'équation $\Delta\Delta u = 0$ est réduite à deux coordonnées. L'étude du Mémoire cité nous a fait reconnaître qu'on peut aisément étendre, d'une manière générale, les formules et les résultats qui y sont contenus; c'est ce que nous nous proposons de faire voir dans ces remarques.

1. Occupons-nous d'abord de l'expression

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

réduite à deux coordonnées. En y appliquant l'opération Δ, nous aurons

$$\Delta^2 u = \Delta(\Delta u) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4};$$

de même nous trouvons

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6}.$$

En continuant de cette manière, on obtiendra généralement

$$\Delta^n u = \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n}} + \binom{n}{1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-2}\partial y^2} + \binom{n}{2}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2n-4}\partial y^4} + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}\frac{\partial^{2n} u}{\partial x^2 \partial y^{2n-2}} + \frac{\partial^{2n} u}{\partial y^{2n}},$$

comme on démontre aisément par induction. C'est à de telles équations que se rapportent ces remarques.

2. On sait que l'équation

$$\Delta u = 0$$

est remplie par $u = \log \frac{1}{r}$ et donc de même par

$$u_0 = \log \frac{1}{r} + 1,$$

où

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2.$$

Or, Mathieu a trouvé que la fonction

$$u_1 = r^2 \log \frac{1}{r} + r^2$$

satisfait à l'équation

$$\Delta u_1 = 4 \log \frac{1}{r} = 4 u_0 - 4,$$

et par conséquent à l'équation

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

Nous avons

$$u_1 = r^2 u_0;$$

cherchons donc si la fonction

$$u_2 = r^2 u_1 = r^4 u_0 = r^4 \log \frac{1}{r} + r^4$$

satisfait à l'équation

$$\Delta^3 u = 0.$$

En effet, on a

$$\Delta u_2 = 16 u_1 - 8 r^2.$$
$$\Delta^2 u_2 = 64 u_0 - 96.$$
$$\Delta^3 u_2 = 0.$$

En considérant maintenant généralement la fonction

$$u_\lambda = r^{2\lambda} \left(\log \frac{1}{r} + 1 \right).$$

on trouve aisément

$$\Delta u_\lambda = 2^2\lambda^2 u_{\lambda-1} \qquad - 2^2\lambda r^{2\lambda-2},$$

$$\Delta^2 u_\lambda = 2^4\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!}\right]^2 u_{\lambda-2} - 2^4\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-2)!}\right]^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}\right) r^{2\lambda-4},$$

$$\Delta^3 u_\lambda = 2^6\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!}\right]^2 u_{\lambda-3} - 2^6\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-3)!}\right]^2\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda-1}+\frac{1}{\lambda-2}\right) r^{2\lambda-6},$$

et, généralement,

$$\Delta^\nu u_\lambda = 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2 u_{\lambda-\nu} - 2^{2\nu}\left[\frac{\lambda!}{(\lambda-\nu)!}\right]^2 \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{1}{\lambda-k} r^{2(\lambda-\nu)}.$$

On voit immédiatement qu'on aura

$$\Delta^\lambda u_\lambda = A u_0 + B;$$

donc la fonction u_λ satisfera à l'équation

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0.$$

Comme $u_0, u_1, \ldots, u_{\lambda-1}$ satisfont déjà à des équations d'ordre inférieur, ces fonctions rempliront identiquement la dernière équation: d'où l'on conclut que l'équation

$$\Delta^n u = 0$$

aura la solution

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \\ &= \left(\log\frac{1}{r}+1\right)(r^0 + r^4 + \ldots + r^{2(n-1)}), \end{aligned}$$

ou, plus généralement,

$$u = g_{n-1}(r^2) + \log\frac{1}{r} h_{n-1}(r^2),$$

où l'on a désigné par $g_{n-1}(r^2)$ et $h_{n-1}(r^2)$ deux fonctions entières de degré $(n-1)$.

3. Soient maintenant

$$\varphi_0(a, b), \qquad \varphi_1(a, b), \qquad \ldots, \qquad \varphi_{n-1}(a, b)$$

n fonctions des coordonnées (a, b) d'un point situé à l'intérieur d'une partie ω du plan limitée par une courbe fermée, et supposons que ces fonctions s'annulent pour tous les points à l'extérieur de ω; considérons alors les expressions

$$v_1 = \int u_0 \varphi_0(a, b)\, d\omega,$$

$$v_2 = \int u_1 \varphi_1(a, b)\, d\omega,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_n = \int u_{n-1} \varphi_{n-1}(a, b)\, d\omega,$$

où l'intégration se fait sur tous les éléments de ω. Évidemment la fonction

$$v_\lambda = \int u_{\lambda-1} \varphi_{\lambda-1}(a, b)\, d\omega = \int r^{2(\lambda-1)} \left(\log \frac{1}{r} + 1\right) \varphi_{\lambda-1}(a, b)\, d\omega$$

satisfait à l'équation

$$\Delta^\lambda v_\lambda = 0, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots)$$

si le point (x, y) se trouve à l'extérieur de ω; donc on a, dans ce cas, en posant

$$V = v_1 + v_2 + \ldots + v_n,$$

l'équation

$$\Delta^n V = 0.$$

Si, au contraire, le point (x, y) est un point intérieur à ω, on a, comme on sait,

$$\Delta v_1 = -2\pi \varphi_0(x, y).$$

Or, en profitant des relations des u_λ (n° **2**), on a, généralement.

$$\Delta v_2 = 4 v_1^{(1)} - 4 \int \varphi_1(a, b)\, d\omega,$$

où $v_1^{(1)}$ est la valeur de v_1 qu'on obtient en y substituant $\varphi_1(a, b)$ au lieu de $\varphi_0(a, b)$. A l'aide de l'équation précédente on peut donc conclure que, pour un point intérieur,

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1(x, y).$$

En continuant de cette manière, on trouvera aisément que, pour un point intérieur de ω, on a

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -2^{2\lambda-1}|(\lambda-1)!|^2 \pi \varphi_{\lambda-1}(x, y),$$

équation correspondant à celle de Poisson. La somme V satisfait évidemment à l'équation

$$\Delta^n V = -\pi \sum_{\lambda=1}^{n} 2^{2\lambda-1}|(\lambda-1)!|^2 \Delta^{n-\lambda}\varphi_{\lambda-1}(x, y),$$

où $\Delta^0 u$ est égal à u.

Il n'y aurait pas de difficulté à donner un sens physique à ces fonctions v_λ, comme Mathieu l'a fait pour le cas $n = 2$, et l'on appellera donc $v_1, v_2, \ldots, v_n$ le premier, le deuxième, ..., le $n^{\text{ième}}$ potentiel de n couches de matière répandues sur ω avec les densités $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ et qui agissent d'après des lois qu'on peut trouver des fonctions $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$. D'ailleurs le potentiel v_1 diffère du potentiel logarithmique ordinaire d'une constante $M = \int \varphi_0(a, b)\, d\omega$, égale à la masse d'une couche de matière répandue sur ω avec la densité φ_0. Nous avons introduit cette constante pour plus d'uniformité et de généralité dans les formules.

Il se comprend de soi-même qu'il faut supposer pour ces fonctions certaines conditions de continuité remplies pour que les opérations aient un sens.

4. En considérant maintenant le cas où u est une fonction des trois variables (x, y, z), nous partirons de

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

d'où nous tirons

$$\Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z^2},$$

$$\Delta^3 u = \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial y^6} + \frac{\partial^6 u}{\partial z^6} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial y^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^4 \partial z^2} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^4 \partial z^2}$$
$$+ 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^4} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial z^4} + 3\frac{\partial^6 u}{\partial y^2 \partial z^4} + 6\frac{\partial^6 u}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$$

et, en général,

$$\Delta^n u = \sum_{\substack{\lambda, \mu, \nu = 0 \\ \lambda + \mu + \nu = n}}^{n} \frac{n!}{\lambda!\,\mu!\,\nu!} \frac{\partial^{2n} u}{\partial x^{2\lambda} \partial y^{2\mu} \partial z^{2\nu}}.$$

Or, l'équation $\Delta u = 0$ est remplie par $u = \frac{1}{r}$ et $u = r^0 = 1$; donc nous posons

$$u_0 = \frac{1}{r} + 1,$$

où

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2,$$

cette fonction satisfera à l'équation $\Delta u = 0$. Si nous prenons maintenant, comme au cas considéré au n° **2**,

$$u_1 = r^2 u_0 = r^2 \left(\frac{1}{r} + 1\right),$$

nous aurons

$$\Delta u_1 = \frac{2}{r} + 6 = 2u_0 + 4;$$

donc

$$\Delta^2 u_1 = 0.$$

En considérant généralement

$$u_\lambda = r^{2\lambda} \left(\frac{1}{r} + 1\right).$$

on aura

$$\Delta u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)\,u_{\lambda-1} + 2.2\lambda r^{2\lambda-2}.$$

$$\Delta^2 u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)(2\lambda-3)\,u_{\lambda-2} + 2.2.2\lambda(2\lambda-1)(2\lambda-2)\,r^{2\lambda-4}.$$

$$\Delta^3 u_\lambda = 2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-5)\,u_{\lambda-3} + 2.3.2\lambda(2\lambda-1)\ldots(2\lambda-4)\,r^{2\lambda-6}.$$

. . . . . .

$$\Delta^\nu u_\lambda = \frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu)!}\,u_{\lambda-\nu} + 2\nu\,\frac{(2\lambda)!}{(2\lambda-2\nu+1)!}\,r^{2\lambda-2\nu}.$$

On conclut de cette équation immédiatement que

$$\Delta^\lambda u_\lambda = (2\lambda)!\,u_0 + 2\lambda(2\lambda)!.$$

et, par suite, la fonction u_λ satisfait à l'équation

$$\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0.$$

Comme on a aussi identiquement $\Delta^{\lambda-k} u_\lambda = 0$ pour $k = 2, 3, \ldots$, la somme des n fonctions

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} \\ &= \frac{1}{r} + 1 + r + r^2 + \ldots + r^{2n-3} + r^{2n-2}, \end{aligned}$$

ou, plus généralement, la fonction

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r}\,h_{n-1}(r^2),$$

où g_{n-1} et h_{n-1} sont deux fonctions entières de degré $(n-1)$, satisfera à l'équation

$$\Delta^n u = 0.$$

3. Si nous désignons maintenant par $\varphi_0(a, b, c)$, $\varphi_1(a, b, c)$, ..., $\varphi_{n-1}(a, b, c)$, n fonctions des points (a, b, c), situés à l'intérieur d'un volume ω de l'espace, et si nous supposons que ces fonctions s'éva-

nouissent au dehors de ω, il est aisé de démontrer que les expressions

$$v_1 = \int u_0 \varphi_0(a, b, c)\, d\omega,$$

$$v_2 = \int u_1 \varphi_1(a, b, c)\, d\omega,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_n = \int u_{n-1} \varphi_{n-1}(a, b, c)\, d\omega,$$

où l'on intègre sur tous les éléments de ω, remplissent respectivement les équations

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \Delta^2 v_2 = 0, \qquad \dots \qquad \Delta^n v_n = 0,$$

pourvu que le point (x, y, z) se trouve à l'extérieur de ω : de même la somme $V = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ satisfera à l'équation $\Delta^n u = 0$ pour un point extérieur. Dans le cas contraire, on part de l'équation de Poisson

$$\Delta v_1 = -4\pi\varphi_0(x, y, z),$$

et, en profitant de l'expression de $\Delta^\nu u_\lambda$ (n° 4), on obtient facilement

$$\Delta^2 v_2 = -8\pi\varphi_1(x, y, z),$$

et, généralement,

$$\Delta^\lambda v_\lambda = -(2\lambda - 2)!\, 4\pi\varphi_{\lambda-1}(x, y, z),$$

de sorte que V satisfait, pour un point intérieur, à l'équation

$$\Delta^n V = -4\pi \sum_{\lambda=1}^{n} (2\lambda - 2)!\, \Delta^{n-\lambda} \varphi_{\lambda-1}(x, y, z).$$

Comme au cas considéré au n° 5, on désignera les fonctions v_1, v_2, ..., v_n sous les noms de premier, de deuxième, ..., de $n^{\text{ième}}$ potentiel. Chaque potentiel est composé de deux parties dont l'une a l'expo-

sant de r impair et l'autre pair, de même qu'on a, dans le cas de deux coordonnées, une partie logarithmique et une autre où l'exposant de r est un nombre pair. D'ailleurs, notre définition diffère un peu de celle de Mathieu pour le cas $n = 2$, ainsi que v_1 diffère d'une constante $M = \int \varphi_0(a, b, c)\, d\omega$ du potentiel newtonien $\int \frac{\varphi_0(a, b, c)}{r}\, d\omega$.

6. Les mêmes considérations que nous venons d'employer pour les deux cas où u est fonction de deux ou de trois variables peuvent servir pour le cas général où u est une fonction de ρ variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_\rho$. On sait que la fonction

$$u = \frac{1}{r^{\rho-2}}, \qquad \text{où} \qquad r^2 = \sum_{i=1}^{\rho} (x_i - a_i)^2,$$

satisfait à l'équation

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0.$$

Sans entrer dans plus de détail, remarquons seulement qu'il y a *une différence essentielle* entre le cas où ρ est un *nombre impair* et celui où ρ est un *nombre pair*.

Dans le premier cas, on peut poser

$$u_0 = \frac{1}{r^{\rho-2}} + 1,$$

$$u_0 = r^2 \left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

$$u_2 = r^4 \left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_\lambda = r^{2\lambda} \left(\frac{1}{r^{\rho-2}} + 1\right),$$

et l'on voit aisément que ces expressions remplissent respectivement les équations

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0,$$

de sorte que

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

ou encore plus généralement

$$u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{2\sigma-2}} h_{n-1}(r^2),$$

où g_{n-1} et h_{n-1} sont deux fonctions entières de degré $(n-1)$, représente une solution de l'équation

$$\Delta^n u = 0.$$

Avec ces fonctions u_λ, on peut former des potentiels des différents ordres, et il est évident que chaque potentiel est composé de deux parties, dont l'une a l'exposant de r impair et l'autre pair.

Mais si ρ est un nombre pair, soit $\rho = 2\sigma$, il n'est pas possible d'avoir des puissances impaires de r, parce qu'elles se réduiraient successivement à $r, \frac{1}{r}, \frac{1}{r^3}, \ldots, \frac{1}{r^{2\sigma-3}}, \frac{1}{r^{2\sigma-1}}, \ldots$, dont aucune ne satisfait à l'équation $\Delta u = 0$. Or on reconnaît facilement que les fonctions

$$\begin{aligned}
u_0 &= \frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1, \\
u_1 &= r^2 \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right), \\
u_2 &= r^4 \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_{\sigma-2} &= r^{2\sigma-4} \left(\frac{1}{r^{2\sigma-2}} + 1 \right)
\end{aligned}$$

satisfont respectivement aux équations

$$\Delta u_0 = 0, \qquad \Delta^2 u_1 = 0, \qquad \Delta^3 u_2 = 0, \qquad \ldots \qquad \Delta^{\sigma-1} u_{\sigma-2} = 0.$$

Mais si nous cherchons maintenant une fonction analogue u_λ, satisfaisant à l'équation $\Delta^{\lambda+1} u_\lambda = 0$ où $\lambda > \sigma - 2$, *il faut introduire la fonc-*

tion $\log \frac{1}{r}$. En effet, on vérifiera sans difficulté que les fonctions

$$\begin{aligned}
u_{\sigma-1} &= \log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}, \\
u_{\sigma} &= r^2 \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right), \\
u_{\sigma+1} &= r^4 \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
u_{\sigma+\lambda} &= r^{2\lambda+2} \left(\log \frac{1}{r} + r^{2\sigma-2}\right)
\end{aligned}$$

remplissent respectivement les équations

$$\Delta^{\sigma} u_{\sigma-1} = 0, \quad \Delta^{\sigma+1} u_{\sigma} = 0, \quad \Delta^{\sigma+2} u_{\sigma+1} = 0, \quad \ldots \quad \Delta^{\sigma+\lambda+1} u_{\sigma+\lambda} = 0.$$

L'équation

$$\Delta^n u = 0,$$

où nous supposons $\rho = 2\sigma$ et $n > \sigma - 1$, soit $n = \sigma - 1 + \nu$, sera donc remplie par la somme

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_{\sigma-2} + u_{\sigma-1} + u_{\sigma} + \ldots + u_{n-1}$$

qui contient $\nu = n + 1 - \sigma = n - \frac{\rho - 2}{2}$ expressions logarithmiques. Évidemment on a aussi cette solution plus générale

$$u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log \frac{1}{r} h_{n-\sigma}(r^2),$$

où g et h sont deux fonctions entières dont les degrés sont indiqués par les indices. Pour $\rho = 2$ ou $\sigma = 1$, tout est d'accord avec le n° **2**. Il est clair que les potentiels d'ordre supérieur qu'on peut former avec ces fonctions u_λ offrent de grandes analogies avec ceux que nous avons considérés au n° **5**.

7. Dans le n° **6**, nous avons trouvé que l'équation

$$(1) \qquad \Delta^n u = 0$$

a l'intégrale

$$(2) \qquad u = g_{n-1}(r^2) + \frac{1}{r^{\rho-2}} h_{n-1}(r^2),$$

ou

$$(3) \qquad u = \frac{1}{r^{2\sigma-2}} g_{n+\sigma-2}(r^2) + \log\frac{1}{r} h_{n-\sigma}(r^2),$$

suivant que ρ est un nombre impair ou un nombre pair; on voit de plus que cette intégrale contient $2n$ constantes arbitraires.

Or, il peut être démontré que ces expressions (2) et (3) sont les fonctions les plus générales de r qui satisfont à l'équation (1). C'est ce que nous voulons faire voir dans ce numéro.

En effet, si nous supposons que u n'est fonction que de r, l'équation

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

se transformera aisément dans une équation différentielle linéaire et homogène

$$(4) \qquad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\rho-1}{r}\frac{du}{dr} = 0.$$

En réitérant l'opération Δ, on obtient $\Delta^2 u = 0$ ou

$$\frac{d^4 u}{dr^4} + 2\frac{\rho-1}{r}\frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^2 u}{dr^2} - \frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^3}\frac{du}{dr} = 0.$$

De même on verra que l'équation $\Delta^3 u = 0$ se transformera dans

$$\begin{aligned}\frac{d^6 u}{dr^6} &+ 3\frac{\rho-1}{r}\frac{d^5 u}{dr^5} + 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)}{r^2}\frac{d^4 u}{dr^4} \\ &+ \frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-8)}{r^3}\frac{d^3 u}{dr^3} - 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^4}\frac{d^2 u}{dr^2} \\ &+ 3\frac{(\rho-1)(\rho-3)(\rho-5)}{r^5}\frac{du}{dr} = 0.\end{aligned}$$

En continuant de cette manière on reconnaîtra que l'équation $\Delta^n u = 0$ se transforme dans une équation différentielle linéaire de la forme

$$\frac{d^{2n} u}{dr^{2n}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{r} \frac{d^{2n-1} u}{dr^{2n-1}} + \frac{\mathfrak{A}_2}{r^2} \frac{d^{2n-2} u}{dr^{2n-2}} + \cdots + \frac{\mathfrak{A}_{2n-1}}{r^{2n-1}} \frac{du}{dr} = 0,$$

où les $\mathfrak{A}$ sont des constantes qui ne dépendent que de ρ, et que cette équation a l'intégrale générale de la forme (2) ou (3), suivant que ρ est un nombre impair ou un nombre pair.

Il y a encore une autre démonstration de ce même fait, laquelle mon ami, M. P. Günther, m'a communiquée et que je reproduis ici.

On voit aisément que l'équation (4) peut être écrite de cette manière :

$$r^{1-\rho} \frac{d}{dr}\left(r^{\rho-1} \frac{du}{dr}\right) = 0,$$

de sorte que l'équation réitérée devient

$$\Delta^n u = r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} \cdots r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr} u = 0,$$

où l'on a employé n fois l'opération

$$r^{1-\rho} \frac{d}{dr} r^{\rho-1} \frac{d}{dr}.$$

Or, si l'on a généralement l'équation

$$t^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_m} \frac{d}{dt} t^{-\mu_1} \frac{d}{dt} t^{-\mu_2} \frac{d}{dt} \cdots \frac{d}{dt} t^{-\mu_m} \frac{dy}{dt} = 0,$$

elle prendra la forme

$$\frac{d^{m+1} y}{dt^{m+1}} + \frac{\mathfrak{A}_1}{t} \frac{d^m y}{dt^m} + \cdots + \frac{\mathfrak{A}_m}{t^m} \frac{dy}{dt} = 0,$$

comme on reconnaît de ce fait que ses intégrales linéairement indépendantes

$$y_\alpha = \int_1^t t^{\mu_m} dt \int_1^t \cdots \int_1^t t^{\mu_\alpha} dt \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

$$y_{m+1} = 1,$$

n'ont que les deux points singuliers $t = 0$ et $t = \infty$ et qu'elles n'y deviennent pas indéterminées, parce qu'elles sont des expressions du caractère $\mathfrak{F}$ [1] appartenant, pour $t = 0$, respectivement aux exposants

$$(5)\quad \begin{cases} p_\alpha = \mu_m + \mu_{m-1} + \ldots + \mu_\alpha + m - \alpha + 1 & (\alpha = 1, 2, \ldots, m); \\ p_{m+1} = 0. \end{cases}$$

Ces exposants sont les racines de l'équation déterminante (d'après M. Fuchs)

$$p(p-1)\ldots(p-m) + \lambda_1 p(p-1)\ldots(p-m+1) + \ldots + \lambda_m p = 0$$

et ils peuvent servir à trouver les expressions des constantes λ, à l'aide de leurs valeurs (5).

En appliquant à l'équation $\Delta^n u = 0$ ces remarques tirées d'un Mémoire de M. P. Günther : *Ueber die Bestimmung der Fundamentalgleichungen in der Theorie der linearen Differentialgleichungen*, qui sera publié prochainement, on a

$$(6)\quad \begin{cases} m = 2n - 1, \\ p_{2i} = 2n - 2i. & (i = 1, 2, \ldots, n-1), \\ p_{2i+1} = 2n - \rho - 2i & (i = 0, 1, \ldots, n-1), \\ p_{2n} = 0. \end{cases}$$

Si ρ est un nombre impair, il ne peut jamais arriver que deux racines de l'équation déterminante soient égales : donc l'équation $\Delta^n u = 0$ a les intégrales linéairement indépendantes

$$u_\alpha = r^{p_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, 2n).$$

Mais si ρ est un nombre pair, il vient, en posant $2n = \rho + 2h$,

$$p_1 = p_{2n-2h}, \qquad p_3 = p_{2n-2h+2}, \qquad \ldots, \qquad p_{2h+1} = p_{2n}.$$

---

[1] *Voir* le Mémoire de M. Fuchs, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. LXVI, p. 155.

et il est aisé de voir qu'il n'y a pas d'autres égalités entre ces racines. De là on conclut, d'après les principes de la théorie des équations différentielles linéaires, que les intégrales

$$r^{p_{2n-2h}}, \quad r^{p_{2n-2h+2}}, \quad \ldots, \quad r^{p_{2n}},$$

doivent être remplacées par celles-ci

$$r^{p_1}\log r, \quad r^{p_3}\log r, \quad \ldots, \quad r^{p_{2h-1}}\log r.$$

En ayant égard aux expressions (6), on voit aisément que l'intégrale générale de l'équation (1) est de la forme (2) ou (3) selon que ρ est un nombre impair ou un nombre pair, ce qui démontre que ces expressions représentent en effet les fonctions les plus générales de r qui remplissent $\Delta^n u = 0$.

Le cas où ρ est un nombre pair peut donc être désigné généralement, dans le sens expliqué, comme le cas logarithmique.

8. Finissons ces remarques par un mot sur la formule de Green

$$(1) \qquad \int (U\Delta V - V\Delta U)\, d\omega = \int \left(V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma,$$

où U et V désignent deux fonctions des coordonnées d'un espace [1] ω limité par σ et où n désigne la normale de l'élément $d\sigma$ dirigée vers l'intérieur de σ.

Si l'on remplace dans la formule (1) U par ΔU, il vient

$$\int (\Delta U\Delta V - V\Delta^2 U)\, d\omega = \int \left(V\frac{\partial \Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial V}{\partial n}\right) d\sigma,$$

et si l'on remplace de même dans (1) V par ΔV, on aura

$$\int (U\Delta^2 V - \Delta U\Delta V)\, d\omega = \int \left(\Delta V\frac{\partial U}{\partial n} - U\frac{\partial \Delta V}{\partial n}\right) d\sigma.$$

---

[1] La formule subsiste encore si ω est un espace de ρ dimensions limité par un espace σ de $\rho - 1$ dimensions. *Voir* C. Neumann, *Zeitschrift für Mathematik und Physik*, t. XII; 1867, et Beltrami, *Memorie dell' Accademia di Bologna*, 2e série, t. VIII; 1868.

En ajoutant ces deux équations, on obtient

$$(2)\quad \begin{aligned} &\int (U\Delta^2 V - V\Delta^2 U)\,d\omega \\ &= \int \left(V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} - U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma + \int \left(\Delta V\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

Cette formule généralisée de Green a été donnée par Mathieu, mais on peut la généraliser encore davantage. En effet, si l'on remplace dans (2) V par ΔV, il vient

$$\begin{aligned} &\int (U\Delta^3 V - \Delta V\Delta^2 U)\,d\omega \\ &= \int \left(\Delta V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} - U\frac{\partial\Delta^2 V}{\partial n}\right)d\sigma + \int \left(\Delta^2 V\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

et remplaçant dans (2) U par ΔU, on a

$$\begin{aligned} &\int (\Delta U\Delta^2 V - V\Delta^3 U)\,d\omega \\ &= \int \left(V\frac{\partial\Delta^2 U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma + \int \left(\Delta V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} - \Delta^2 U\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

En ajoutant ces deux dernières équations, on obtient

$$\begin{aligned} &\int (U\Delta^3 V - V\Delta^3 U)\,d\omega + \int (\Delta U\Delta^2 V - \Delta V\Delta^2 U)\,d\omega \\ &= \int \left(V\frac{\partial\Delta^2 U}{\partial n} - U\frac{\partial\Delta^2 V}{\partial n}\right)d\sigma \\ &\quad + 2\int \left(\Delta V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma + \int \left(\Delta^2 V\frac{\partial U}{\partial n} - \Delta^2 U\frac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma. \end{aligned}$$

Or l'équation (1) nous donne, en y remplaçant U et V par ΔU et ΔV,

$$\int (\Delta U\Delta^2 V - \Delta V\Delta^2 U)\,d\omega = \int \left(\Delta V\frac{\partial\Delta U}{\partial n} - \Delta U\frac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma;$$

la soustraction de cette équation de la précédente donnera donc

$$(3)\quad \begin{cases} \int (U\Delta^3 V - V\Delta^3 U)\,d\omega \\ \quad = \int\left(V\dfrac{\partial\Delta^2 U}{\partial n} - U\dfrac{\partial\Delta^2 V}{\partial n}\right)d\sigma + \int\left(\Delta V\dfrac{\partial\Delta U}{\partial n} - \Delta U\dfrac{\partial\Delta V}{\partial n}\right)d\sigma \\ \quad + \int\left(\Delta^2 V\dfrac{\partial U}{\partial n} - \Delta^2 U\dfrac{\partial V}{\partial n}\right)d\sigma. \end{cases}$$

En continuant de cette manière, on arrive à démontrer cette formule

$$(G)\quad \begin{cases} \int (U\Delta^m V - V\Delta^m U)\,d\omega \\ \quad = \displaystyle\sum_{\lambda=0}^{m-1} \int\left(\Delta^\lambda V\dfrac{\partial\Delta^{m-1-\lambda} U}{\partial n} - \Delta^\lambda U\dfrac{\partial\Delta^{m-1-\lambda} V}{\partial n}\right)d\sigma, \end{cases}$$

où

$$\Delta^0 U = U.$$

L'équation (G) représente la généralisation du théorème de Green (pour $m = 1$). Elle joue dans l'étude des potentiels d'ordre supérieur un rôle analogue à celui de l'équation (1) dans la théorie du potentiel ordinaire ou à celui de l'équation (2) dans la théorie du deuxième potentiel. Nous n'entrons pas ici dans la recherche de ces applications de l'équation (G).

Les conditions de continuité qu'il faut imposer aux fonctions U et V et aux dérivées de ces fonctions sont aisées à reconnaître, c'est pourquoi nous ne les avons pas énoncées explicitement.

Sur une classe de courbes planes et sur une surface remarquable du quatrième ordre;

PAR M. GEORGES HUMBERT.

1. L'équation d'une quartique, ou courbe du quatrième ordre, rapportée au triangle xyz formé par trois de ses tangentes doubles, dont les six points de contact ne sont pas sur une conique, est de la forme

$$(1) \quad p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2przx - 2qryz = txyz,$$

p, q, r, t désignant des fonctions linéaires de x, y, z.

La classe remarquable de quartiques, dont nous allons faire connaître de nombreuses propriétés, est celle que représente l'équation générale précédente, en supposant que p, q, r soient les dérivées partielles, par rapport à x, y, z, d'une même fonction $f(x, y, z)$ du second ordre.

Avant d'aborder cette étude, nous rappellerons quelques propositions générales relatives aux quartiques.

2. On sait qu'une quartique sans point double admet soixante-trois systèmes de coniques inscrites, c'est-à-dire de coniques quadruplement tangentes; l'équation générale des coniques d'un système dépendant d'un paramètre qui y figure au second ordre, ces coniques font partie d'un réseau ponctuel. Il en résulte que les six cordes com-

munes à deux d'entre elles touchent une courbe de troisième classe, la cayleyenne du réseau, et que les trois sommets de chacun des trois couples de ces cordes sont sur la jacobienne du réseau, courbe du troisième ordre.

En particulier, les six droites qui joignent deux à deux les quatre points de contact d'une des coniques avec la quartique touchent la cayleyenne, et les trois sommets des trois couples formés par ces droites sont sur la jacobienne.

On sait aussi que les huit points de contact de deux coniques du même système sont sur une conique.

Chacun des soixante-trois systèmes de coniques inscrites comprend six couples de droites, qui sont des bitangentes de la quartique; il est clair, d'ailleurs, que le système est déterminé quand on se donne un de ces couples de bitangentes.

Deux systèmes de coniques inscrites ont en commun quatre ou six bitangentes : dans le premier cas, les huit points de contact des quatre bitangentes communes sont sur une conique. Dans le second, les six bitangentes de chacun des deux systèmes, non communes à l'autre, appartiennent à un troisième système. L'ensemble des bitangentes appartenant à ces trois systèmes se compose donc seulement de dix-huit droites; on peut les répartir en six triangles et faire correspondre entre eux les sommets et les côtés de ces triangles, de telle sorte que les douze côtés issus de six sommets homologues appartiennent à un même système.

La figure formée par les six triangles et les deux points de contact de chacun de leurs côtés avec la quartique jouit de propriétés géométriques nombreuses. Désignons les sommets d'un triangle par les lettres a_i, b_i, c_i, les lettres a s'appliquant à six sommets homologues, et de même les lettres b et c. Considérons trois quelconques des triangles; supprimons dans l'un le côté opposé au sommet a, dans le deuxième, le côté opposé au sommet b, dans le troisième, le côté opposé au sommet c; convenons de dire que, dans la figure qui subsiste, et qui se compose de trois angles, un côté *aboutit* au sommet de l'angle auquel il appartient, et qu'il est *issu* du sommet situé à son autre extrémité.

Les douze points de contact avec la quartique des six côtés consi-

dérés sont sur une cubique; deux côtés aboutissant à un sommet a (ou b, ou c) et un côté issu d'un sommet a (ou b, ou c) ont leurs six points de contact sur une conique; deux côtés issus d'un sommet a, deux côtés issus d'un sommet b, deux côtés issus d'un sommet c forment trois couples, dont les sommets sont en ligne droite [1].

3. Cela posé, revenons à l'équation (1), et supposons que l'on ait

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad r = \frac{df}{dz}.$$

On peut écrire

$$p = x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z},$$

et de même pour q et r.

L'équation (1) s'écrit alors

$$x^2\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + z\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial z}\right)^2 + \ldots = txyz.$$

En développant, on voit que les termes qui contiennent, au premier membre, le cube d'une des variables disparaissent; il ne subsiste que des termes en x^4, y^4, z^4, x^2y^2, y^2z^2, x^2z^2, et des termes en xyz que l'on peut faire passer au second membre.

Effectuant les calculs, il reste

$$(2)\quad x^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right)^2 + y^4\left(\frac{\partial^2 f}{dy^2}\right)^2 + z^4\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)^2 - 2x^2y^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f}{dy^2} - \ldots = u_1 xyz,$$

u_1 étant linéaire en x, y, z.

Posons

$$x\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}} = X, \qquad y\sqrt{\frac{\partial^2 f}{dy^2}} = Y, \qquad z\sqrt{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}} = Z,$$

---

[1] Ces propositions sont démontrées dans le *Traité des courbes planes*, de Salmon, ou se déduisent aisément des résultats établis dans ce Traité (trad. O. Chemin, pages 320 et suivantes). *Cf.* aussi STEINER, *Journal de Crelle*, t. 49, p. 265.

il vient

$$(3) \qquad X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ.$$

Telle est la forme canonique à laquelle on peut ramener l'équation des quartiques dont nous nous occupons; il ne subsiste, dans u, que trois paramètres arbitraires, et l'on voit que l'équation générale de ces courbes dépend de onze paramètres, quand le triangle de référence est quelconque.

4. *Remarque.* — Nous avons supposé implicitement que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ ne sont pas nuls. Si l'on avait, par exemple,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad \text{avec} \qquad \frac{\partial^2 f}{dy^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \gtrless 0,$$

l'équation (2) deviendrait, en y introduisant Y et Z comme plus haut,

$$(4) \qquad Y^4 + Z^4 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ,$$

et la courbe aurait un point double, $Y = 0$, $Z = 0$, cas que nous excluons ici.

5. L'équation (3) peut se mettre sous la forme

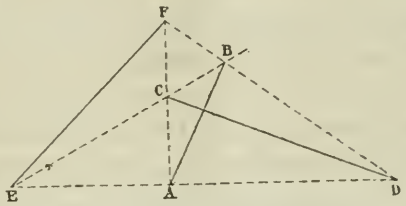
$$(5) \quad (X+Y+Z)(X+Y-Z)(X-Y+Z)(X-Y-Z) = 4uXYZ.$$

Cette forme met en évidence une propriété importante des trois tangentes doubles $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$: c'est que les six points de contact avec la quartique de ces trois droites sont répartis trois à trois sur les quatre droites $X+Y+Z=0$, $X+Y-Z=0$, $X-Y+Z=0$, $X-Y-Z=0$, ou encore que *les trois bitangentes sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont leurs points de contact avec la quartique.*

Ainsi, dans la figure ci-dessous, AB, CD, EF sont les trois bitangentes et les points A, B, C, D, E, F sont leurs points de contact.

Inversement, si les trois bitangentes x, y, z jouissent de cette propriété, l'équation (3) de la quartique se met sous la forme (1), où p,

q, r sont les dérivées partielles d'une même fonction : on vérifie sans difficulté qu'on peut le faire d'une infinité de manières.



6. Nous savons, en nous reportant aux généralités rappelées plus haut, que les trois bitangentes $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, associées deux à deux, déterminent trois systèmes de coniques inscrites, et que l'ensemble des bitangentes appartenant à ces trois systèmes se compose de dix-huit droites, réparties en six triangles homologues, dont le triangle XYZ est l'un. Il est extrêmement curieux de voir que *la propriété précédente du triangle* XYZ *appartient également à chacun des cinq autres triangles.*

Considérons, en effet, le système déterminé par les bitangentes AB et CD : la cayleyenne de ce système, d'après ce qui a été rappelé, touche les droites AB, CD, et les droites obtenues en joignant deux à deux leurs points de contact avec la quartique, c'est-à-dire les droites AC, BD, BC, DA. De même, la cayleyenne du système déterminé par les bitangentes AB, EF touche ces deux droites, et les droites AC, BD, BC, DA. Ces deux cayleyennes ont donc déjà cinq tangentes communes, AB, AC, BD, BC, DA. Si nous considérons maintenant, dans chacun des cinq autres triangles, le côté qui est commun aux deux systèmes définis par AB, CD et AB, EF, nous avons cinq nouvelles droites, tangentes à chacune des deux cayleyennes, et qui sont évidemment distinctes des premières tangentes communes. Les deux cayleyennes, étant de troisième classe, ne peuvent avoir dix tangentes communes sans coïncider; de même la cayleyenne du système défini par CD, EF coïncide avec les deux premières, et par suite *les trois systèmes de coniques inscrites, définis par les côtés du triangle* XYZ, *associés deux à deux, ont une seule et même cayleyenne.*

Cela posé, soit un second triangle, analogue à XYZ, dont nous désignerons les côtés par A′B′, C′D′, E′F′; les points de contact avec

la quartique étant A′, B′; C′, D′; E′, F′; il s'agit de montrer qu'il jouit de la même propriété que le triangle XYZ.

Or, les droites A′B′, A′D′, A′E′, A′C′, A′F′ sont tangentes à la cayleyenne commune aux trois systèmes; comme cette courbe est de troisième classe, il faut qu'elles se réduisent à trois au plus, et l'on en conclut que les points A′, C′, F′ et A′, D′, E′ sont en ligne droite. En poursuivant le raisonnement pour les tangentes issues des points B′, C′, ..., F′, on voit que les trois tangentes doivent être nécessairement les diagonales d'un quadrilatère complet dont les sommets sont leurs points de contact.

7. Le calcul vérifie et complète ces résultats.

En premier lieu, si l'on écrit l'équation de la quartique sous la forme

$$(5)\qquad X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ,$$

on peut mettre les équations des trois systèmes de coniques inscrites définis par les couples de bitangentes YZ, ZX, XY sous la forme

$$(6)\qquad \alpha^2 YZ + 2\alpha(Y^2 + Z^2 - X^2) + 4YZ + 4uX = 0,$$

$$(7)\qquad \beta^2 ZX + 2\beta(Z^2 + X^2 - Y^2) + 4ZX + 4uY = 0,$$

$$(8)\qquad \gamma^2 XY + 2\beta(X^2 + Y^2 - Z^2) + 4XY + 4uZ = 0,$$

α, β, γ étant des paramètres variables. L'enveloppe des coniques (6), par exemple, est bien la courbe (5), comme on le voit aisément, et l'une de ces coniques est bien le couple YZ.

La cayleyenne du système (6) est évidemment celle du réseau

$$\lambda_1 YZ + \lambda_2(Y^2 + Z^2 - X^2) + \lambda_3 uX = 0,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ étant des paramètres variables; l'équation de cette cayleyenne, calculée d'après les formules générales connues, est, en coordonnées tangentielles [1],

$$u'_x\xi(\zeta^2 - \eta^2) + u'_y\eta(\xi^2 - \zeta^2) + u'_z\zeta(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

---

[1] *Cf.* Salmon, *Sections coniques*. L'équation d'une droite est supposée de la forme $\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0$.

et la symétrie montre qu'on obtient la même équation pour les systèmes (7) et (8).

8. En second lieu, je dis qu'on peut mettre l'équation (5) sous la forme

$$(9)\quad X^2\varphi_X'^2 + Y^2\varphi_Y'^2 + Z^2\varphi_Z'^2 - 2XY\varphi_X'\varphi_Y' - 2XZ\varphi_X'\varphi_Z' - 2YZ\varphi_Y'\varphi_Z' = 0,$$

φ étant une fonction du second ordre en X, Y, Z. C'est la même forme que (1), mais il n'y a pas de second membre.

Soit, en effet,

$$(10)\quad \begin{cases} \varphi_X' = X + \nu Y + \mu Z, \\ \varphi_Y' = \nu X + Y + \lambda Z, \\ \varphi_Z' = \mu X + \lambda Y + Z. \end{cases}$$

L'équation (9) développée peut s'écrire, en remarquant que les termes qui contiennent le cube d'une des variables disparaissent,

$$(11)\quad \begin{cases} X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 \\ \quad = 4XYZ[(\mu\nu + \lambda)X + (\nu\lambda + \mu)Y + (\lambda\mu + \nu)Z]. \end{cases}$$

Cette équation sera identique à l'équation (5) si l'on a

$$u_x' = \mu\nu + \lambda,$$
$$u_y' = \nu\lambda + \mu,$$
$$u_z' = \lambda\mu + \nu.$$

On vérifie sans difficulté que ces trois relations donnent pour λ, μ, ν cinq systèmes de valeurs non infinies; il y a donc cinq fonctions φ répondant à la question.

Soit φ l'une d'elles; l'équation (9) montre que les droites $\varphi_X' = 0$, $\varphi_Y' = 0$, $\varphi_Z' = 0$ sont des bitangentes de la quartique; si nous prenons ces droites pour côtés du triangle de référence, $X_1Y_1Z_1$, l'équation (9) pourra évidemment s'écrire

$$(12)\quad \begin{cases} X_1^2\psi_{X_1}'^2 + Y_1^2\psi_{Y_1}'^2 + Z_1^2\psi_{Z_1}'^2 \\ \qquad - 2X_1Y_1\psi_{X_1}'\psi_{Y_1}' - 2X_1Z_1\psi_{X_1}'\psi_{Z_1}' - 2Y_1Z_1\psi_{Y_1}'\psi_{Z_1}' = 0. \end{cases}$$

ψ étant une fonction du second ordre, car X, Y, Z sont aussi, d'après (10), les dérivées par rapport à φ'_X, φ'_Y, φ'_Z d'une même fonction de ces trois quantités.

En développant cette équation, on voit disparaître les termes qui contiennent le cube d'une des variables, et l'on met le résultat sous la forme

$$\begin{aligned}&\lambda_1^2 X_1^4 + \mu_1^2 Y_1^4 + \nu_1^2 Z_1^4\\ &\quad - 2\lambda_1\mu_1 X_1^2 Y_1^2 - 2\lambda_1\nu_1 X_1^2 Z_1^2 - 2\mu_1\nu_1 Y_1^2 Z_1^2 = 4\nu X_1 Y_1 Z_1;\end{aligned}$$

ce qui montre bien que le triangle $X_1 Y_1 Z_1$ jouit de la même propriété que le triangle XYZ.

De plus, on voit que *deux quelconques des six triangles sont polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une conique*, car XYZ étant l'un d'eux, un des autres a pour côtés les droites $\varphi'_X = 0$, $\varphi'_Y = 0$, $\varphi'_Z = 0$.

9. *Propriétés d'un des triangles.* — D'après ce qui a été dit plus haut, les trois côtés d'un des triangles et les quatre côtés du quadrilatère complet correspondant touchent la cayleyenne commune des trois systèmes de coniques inscrites, définis par les côtés du triangle, pris deux à deux. Cette cayleyenne étant une courbe de troisième classe, on peut associer à chacune de ses tangentes un argument elliptique, de telle sorte que les arguments de trois tangentes issues d'un point aient une somme nulle à des périodes près, et réciproquement.

Cela posé, soient α, β, γ les arguments des trois côtés AB, CD, EF d'un triangle; a, b, c, d ceux des quatre côtés AC, AD, BC, BD du quadrilatère.

On a, en écrivant que les arguments des tangentes issues des points A, B, C, D, F, E ont une somme nulle,

$$\begin{aligned}&\alpha + a + b \equiv 0, &&\alpha + c + d \equiv 0,\\ &\beta + a + c \equiv 0, &&\beta + b + d \equiv 0,\\ &\gamma + a + d \equiv 0, &&\gamma + b + c \equiv 0.\end{aligned}$$

Les seconds membres ne sont nuls qu'à des multiples près des périodes

ω_1, ω_2. On tire de là

$$2a \equiv 2b \equiv 2c \equiv 2d \qquad (\text{mod}\, \omega_1, \omega_2),$$

et, par suite, on peut écrire, θ désignant un nouvel argument,

$$a = -\theta, \qquad b = -\theta + \frac{\omega_1}{2}, \qquad c = -\theta + \frac{\omega_2}{2}, \qquad d = -\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2};$$

d'où

$$\alpha = 2\theta + \frac{\omega_1}{2},$$

$$\beta = 2\theta + \frac{\omega_2}{2},$$

$$\gamma = 2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

Il en résulte immédiatement que les quatre tangentes d'arguments a, b, c, d ont leurs quatre points de contact avec la cayleyenne sur une même tangente à cette courbe, qui correspond à l'argument 2θ; les tangentes d'arguments α, β, γ et la tangente d'argument 2θ ont de même leurs quatre points de contact sur une même tangente, d'argument -4θ.

La figure formée par le quadrilatère complet et ses diagonales est déterminée dès qu'on se donne la tangente d'argument 2θ, que nous appellerons *droite associée* au triangle ou au quadrilatère : en effet, cette droite, en dehors de son point de contact, coupe la cayleyenne (qui est d'ordre six) en quatre points, et les quatre côtés du quadrilatère sont les tangentes menées à la courbe en ces points.

En transformant la figure par polaires réciproques, on a, au lieu de la cayleyenne une courbe du troisième ordre; à la droite associée correspond un point de la courbe, aux quatre côtés du quadrilatère les quatre points de contact des tangentes issues de ce point, et aux trois côtés du triangle les sommets des trois couples de droites qui passent par ces quatre points.

On voit également que deux côtés du quadrilatère forment un couple steinérien de tangentes à la cayleyenne; les deux autres côtés forment un couple steinérien de même espèce.

De même, deux côtés du triangle, et le troisième côté combiné à la droite associée, forment deux couples steinériens de même espèce.

La *droite associée* à un quadrilatère a, par rapport à la quartique elle-même, une signification intéressante.

La quartique étant, en effet,

$$X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 = 4uXYZ,$$

nous savons qu'en posant

$$u = AX + BY + CZ,$$

la cayleyenne dont il s'agit a pour équation tangentielle

$$F(\xi, \eta, \zeta) = A\xi(\zeta^2 - \eta^2) + B\eta(\xi^2 - \zeta^2) + C\zeta(\eta^2 - \xi^2) = 0.$$

Le point où une droite $\xi X + \eta Y + \zeta Z = 0$, dont les coefficients vérifient cette équation, touche la cayleyenne, est défini par les relations

$$\frac{X}{F'_\xi} = \frac{Y}{F'_\eta} = \frac{Z}{F'_\zeta}.$$

S'il s'agit d'un des côtés du quadrilatère, $X \pm Y \pm Z = 0$, on aura, en faisant $\xi^2 = \eta^2 = \zeta^2$,

$$\frac{X}{(B\eta - C\zeta)\xi} = \frac{Y}{(-A\xi + C\zeta)\eta} = \frac{Z}{(A\xi - B\eta)\zeta}$$

et l'on voit que les coordonnées X, Y, Z de *chacun* des quatre points de contact des quatre côtés vérifient la relation

$$AX + BY + CZ = 0.$$

En d'autres termes, la droite $u = 0$ passe par les quatre points de contact de ces côtés; c'est donc la droite associée au quadrilatère. Ainsi :

La droite associée à un quadrilatère est celle qui joint les quatre points, distincts des six sommets de ce quadrilatère, où les quatre

côtés coupent de nouveau la quartique. C'est en ces points que les quatre côtés touchent respectivement la cayleyenne.

10. *Propriétés de deux triangles.* — Deux triangles étant polaires réciproques l'un de l'autre par rapport à une conique, les trois droites qui joignent les sommets homologues se coupent en un même point, et les trois points d'intersection des trois couples de côtés homologues sont en ligne droite.

Ce dernier résultat peut se démontrer et se compléter à l'aide de la considération des arguments elliptiques.

En effet, les arguments qui correspondent aux côtés de chacun des triangles étant $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$; et $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ les couples de droites $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$; $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$; $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, se coupent respectivement sur la tangente d'argument $-2(\theta + \theta_1)$, sur laquelle se coupent aussi les deux droites d'arguments 2θ et $2\theta_1$, associées aux deux triangles.

Deux côtés du premier triangle et les côtés homologues du second forment deux couples steinériens de même espèce; par suite, les droites qui joignent en croix les quatre points d'intersection des deux couples touchent la cayleyenne; la proposition subsiste si l'on remplace deux côtés homologues par les droites associées correspondantes.

Si l'on combine d'une autre manière les côtés des deux triangles, en considérant par exemple les deux couples $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$, et $2\theta + \frac{\omega_2}{2}$, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, on voit qu'ils se coupent sur la tangente $-2(\theta + \theta_1) + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, sur laquelle se coupent aussi les couples 2θ, $2\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$ et $2\theta + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, 2θ. En d'autres termes, les seize points d'intersection des trois côtés et de la droite associée du premier triangle, avec les trois côtés et la droite associée du second, sont situés quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la cayleyenne, et, leurs arguments étant de la forme θ', $\theta' + \frac{\omega_1}{2}$, $\theta' + \frac{\omega_2}{2}$,

$\theta' + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, leurs quatre points de contact sont sur une nouvelle tangente de la courbe.

On a une proposition analogue pour les seize points communs aux côtés de deux quadrilatères.

Deux côtés du premier quadrilatère, tels que ceux d'arguments $-\theta_1$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, concourant sur le côté $2\theta + \frac{\omega_1}{2}$ du premier triangle, et deux côtés du second quadrilatère tels que $-\theta$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$ ou $-\theta_1 + \frac{\omega_2}{2}$ et $-\theta_1 + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$, concourant sur le côté homologue, $2\theta_1 + \frac{\omega_1}{2}$, du second triangle, forment deux couples steinériens de même espèce : les deux droites qui joignent en croix les quatre points d'intersection de ces deux couples touchent donc la cayleyenne.

Six tangentes de la cayleyenne touchent une conique quand leurs arguments ont une somme nulle à des multiples près des périodes; il en résulte que toute conique touchant deux côtés du premier quadrilatère et un des côtés du premier triangle, ainsi que deux côtés du second quadrilatère, touchera nécessairement un des côtés du second triangle, ou la droite associée à ce triangle.

11. *Propriétés de l'ensemble des six triangles.* — Si nous nous reportons au n° **8**, nous voyons que les cinq côtés homologues du côté $X = 0$ du premier triangle sont donnés par l'équation

$$X + \nu Y + \mu Z = 0,$$

où μ et ν sont déterminés par les équations

$$(13) \qquad A = \mu\nu + \lambda, \qquad B = \nu\lambda + \mu, \qquad C = \lambda\mu + \nu,$$

c'est-à-dire, en éliminant λ,

$$B = \mu + \nu(A - \mu\nu), \qquad C = \nu + \mu(A - \mu\nu):$$

d'où l'on tire

$$B\mu - C\nu = \mu^2 - \nu^2.$$

Cette relation, du second degré en μ et ν, montre que les cinq droites considérées touchent la conique dont l'équation tangentielle est

$$\xi(B\zeta - C\eta) = \zeta^2 - \eta^2.$$

Cette conique touche aussi la droite $\eta = 0$, $\zeta = 0$, c'est-à-dire le côté $X = 0$ du premier triangle; donc six côtés homologues des six triangles touchent une conique. On obtient ainsi trois coniques ayant pour équations

$$\xi(B\zeta - C\eta) = \zeta^2 - \eta^2,$$
$$\eta(C\xi - A\zeta) = \xi^2 - \zeta^2,$$
$$\zeta(A\eta - B\xi) = \eta^2 - \xi^2.$$

En additionnant membre à membre ces trois équations, on trouve un résultat nul; les trois coniques sont donc inscrites à un même quadrilatère.

Les six droites associées aux six triangles touchent aussi une conique; en effet, on voit aisément, en partant des formules du n° **8**, que les droites associées aux cinq derniers triangles sont données par l'équation

$$\lambda X + \mu Y + \nu Z = 0,$$

où λ, μ, ν vérifient les relations (13). En cherchant à former une équation homogène et du second ordre entre λ, μ, ν, à l'aide de ces relations, on trouve sans difficulté

$$\begin{vmatrix} A\mu\nu + \lambda^2 & B\lambda\nu + \mu^2 & C\lambda\mu + \nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La conique représentée par cette équation, où λ, μ, ν désignent

des coordonnées tangentielles, touche les cinq droites associées aux cinq derniers triangles; elle touche aussi la droite

$$AX + BY + CZ = 0,$$

associée au premier, puisque son équation est évidemment vérifiée pour $\lambda = A$, $\mu = B$, $\nu = C$: les six droites associées aux six triangles touchent donc une conique.

Il en résulte que leurs arguments ont une somme nulle; on a donc, à des multiples près de ω_1, ω_2 : $2\theta + 2\theta_1 + 2\theta_2 + 2\theta_3 + 2\theta_4 + 2\theta_5 = 0$, et par suite $\theta + \theta_1 + \ldots + \theta_5$ est égal à zéro, ou à une des trois demi-périodes. On en conclut que si l'on considère un côté dans chacun des cinq premiers quadrilatères, la conique qui touche ces cinq droites touche aussi un des côtés du dernier quadrilatère, car les arguments de ces côtés sont de la forme $-\theta_i$, à une demi-période près. Il y a ainsi 4^5, c'est-à-dire mille vingt-quatre coniques, dont chacune touche un côté de chaque quadrilatère.

Il y a de même 1024 coniques touchant chacune un côté ou la droite associée de chacun des six triangles; parmi ces coniques, 183 touchent chacune un côté de chaque triangle. Pour obtenir ces 183 coniques, on prend un côté dans chaque triangle, de manière que, dans la combinaison, le nombre des côtés homologues entre eux soit toujours pair.

12. On peut donner d'autres propositions, sur les sommets et les côtés des six quadrilatères; elles résultent sans difficulté des principes généraux rappelés au n° **2**, et nous nous bornerons à les énoncer, en les réunissant à celles établies tout à l'heure, pour donner un Tableau résumé des curieuses propriétés de nos courbes.

Si trois bitangentes d'une quartique sont les diagonales d'un quadrilatère complet dont les six sommets sont leurs points de contact avec la quartique, il existe cinq autres groupes de trois bitangentes jouissant de la même propriété.

Ces six triangles se correspondent de telle sorte que les six couples de côtés issus de six sommets homologues appartiennent à un même système de coniques inscrites à la quartique; les trois sys-

tèmes de coniques ainsi définis ont une seule et même cayleyenne, C, *qui est une courbe de troisième classe et du sixième ordre.*

Les dix-huit côtés des six triangles et les vingt-quatre côtés des six quadrilatères correspondants touchent la courbe C.

Les quatre points où les côtés d'un quadrilatère touchent C *sont sur une droite* D, *qui touche elle-même la courbe* C: *ces points coïncident avec les points, distincts des six sommets, où les côtés du quadrilatère coupent la quartique. La droite* D *est dite la droite* associée *du quadrilatère ou du triangle correspondant.*

Les quatre points où les côtés et la droite associée d'un triangle touchent la courbe C *sont sur une même tangente de cette courbe.*

Les trois droites qui joignent les sommets homologues de deux des triangles se coupent en un même point.

Les trois points d'intersection des côtés homologues de deux triangles et le point d'intersection des droites associées à ces triangles sont sur une même tangente de la courbe C.

Les seize points d'intersection des trois côtés et de la droite associée d'un triangle avec les trois côtés et la droite associée d'un autre triangle sont situés quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la courbe C *en quatre points, situés eux-mêmes sur une tangente à cette courbe.*

Les seize points d'intersection des quatre côtés d'un des quadrilatères avec les quatre côtés d'un autre quadrilatère sont quatre à quatre sur quatre nouvelles droites; ces droites touchent la courbe C *en quatre points situés eux-mêmes sur une tangente à cette courbe.*

Six côtés homologues des six triangles touchent une même conique; les trois coniques ainsi définies ont quatre tangentes communes.

Il existe 180 *autres coniques dont chacune touche un côté de chacun des six triangles; on les obtient en prenant un côté dans chaque triangle, de manière que, dans cette combinaison, le nombre des côtés homologues entre eux soit toujours pair.*

Les six droites associées aux six triangles touchent une même conique.

Il existe 1024 *coniques, dont chacune touche un côté de chacun des six quadrilatères.*

Les six couples de côtés issus de six sommets homologues des six triangles déterminent, sur un quelconque des six autres côtés, des couples de points en involution; les points doubles de l'involution sont les points de contact du côté considéré avec la quartique.

Six sommets homologues des six triangles et les douze points de contact des six côtés opposés sont sur une courbe du troisième ordre: cette courbe est la jacobienne du système de coniques inscrites auquel appartiennent les couples de côtés issus des six sommets considérés.

A chaque système de six sommets (ou de six côtés) homologues correspond ainsi une courbe du troisième ordre; chacune des trois courbes définies de cette manière touche en neuf points la courbe C.

Les deux points de contact avec la quartique de l'un des côtés d'un triangle forment, sur la jacobienne correspondante, un couple steinérien; par suite :

Si l'on joint en croix les points de contact de deux côtés homologues de deux triangles, les droites de jonction se coupent en deux nouveaux points, qui sont situés sur la jacobienne correspondante; les six côtés homologues donnent ainsi trente points de la jacobienne.

Par chacun des points de contact de l'un des côtés d'un triangle on peut faire passer une conique, inscrite à la quartique, et ayant deux de ses quatre contacts confondus en ce point.

Le remarquable système de dix-huit tangentes doubles que nous étudions jouit, en outre, des propriétés générales rappelées au n° **2** et qui appartiennent à toutes les quartiques; sans insister davantage sur ces propriétés, nous indiquerons comment on peut construire, indépendamment de toute courbe du quatrième ordre, un pareil système de six triangles et quadrilatères.

15. Soit une courbe quelconque de troisième classe et du sixième degré C; prenons une de ses tangentes, t_1 : les tangentes menées à C aux quatre nouveaux points où t_1 coupe la courbe formeront les côtés d'un quadrilatère, dont t_1 sera la droite associée.

Mais ce premier quadrilatère ne suffit pas pour déterminer les autres : en effet, les diagonales du quadrilatère étant prises pour côtés du triangle de référence, $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$, et ces diagonales elles-mêmes étant représentées par les équations $X \pm Y \pm Z = 0$, la quartique correspondante sera

$$\begin{aligned} &X^4 + Y^4 + Z^4 - 2X^2Y^2 - 2X^2Z^2 - 2Y^2Z^2 \\ &= 4(AX + BY + CZ)XYZ. \end{aligned}$$

La tangente t_1 a pour équation $AX + BY + CZ = 0$; mais, si l'on se donne cette droite, A, B, C ne sont connus qu'à un facteur près, et, par suite, il reste encore un coefficient arbitraire dans l'équation de la quartique. On peut donc choisir arbitrairement une seconde tangente, t_2, à la courbe C, pour droite associée du second quadrilatère.

Rappelons-nous maintenant que les six droites associées aux six quadrilatères touchent (n° **11**) la conique

$$\begin{vmatrix} A\mu\nu + \lambda^2 & B\lambda\nu + \mu^2 & C\lambda\mu + \nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0,$$

où λ, μ, ν désignent des coordonnées tangentielles.

Cette conique touche les tangentes communes aux deux coniques

$$(14) \quad \begin{vmatrix} \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad (15) \quad \begin{vmatrix} A\mu\nu & B\lambda\nu & C\lambda\mu \\ 1 & 1 & 1 \\ A^2 & B^2 & C^2 \end{vmatrix} = 0:$$

La première de ces deux coniques touche les côtés du quadrilatère et la droite t_1, puisque son équation est vérifiée pour $\lambda = 1$, $\mu = \pm 1$, $\nu = \pm 1$, et $\lambda = A$, $\mu = B$, $\nu = C$. Elle est donc déterminée.

La seconde conique touche les diagonales $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ du quadrilatère, la droite t_1 et la droite $\frac{X}{A} + \frac{Y}{B} + \frac{Z}{C} = 0$. Cette dernière droite jouit de la propriété évidente que son point d'intersection avec une des diagonales du quadrilatère est conjugué harmonique.

par rapport aux extrémités de cette diagonale, du point où la même diagonale coupe la droite $AX + BY + CZ = 0$.

Si donc on considère le faisceau tangentiel défini par les deux coniques (14) et (15), et si l'on construit la conique du faisceau qui touche la droite t_2, on n'aura qu'à mener les six tangentes communes à cette conique et à la courbe C pour avoir les six droites $t_1, t_2, \ldots, t_6$ associées aux six quadrilatères.

En d'autres termes :

Le système des six quadrilatères peut se construire comme il suit :

Soit une courbe de troisième classe et du sixième degré, C ; *une quelconque de ses tangentes,* t_1, *la coupe en quatre nouveaux points, et les tangentes en ces points déterminent un premier quadrilatère.*

On considère maintenant deux coniques : la première touchant les quatre côtés du quadrilatère et la droite t_1 ; *la seconde touchant les trois diagonales du quadrilatère, la droite* t_1, *et la droite telle que son point d'intersection et celui de* t_1 *avec chaque diagonale soient conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette diagonale.*

Ces deux coniques déterminent un faisceau tangentiel; les six tangentes communes à C *et à une quelconque des coniques de ce faisceau sont les droites* $t_1, t_2, \ldots, t_6$, *associées aux six quadrilatères cherchés, dont chacun se déduit de sa droite associée comme le premier a été déduit de la droite* t_1.

14. Il existe une *surface remarquable du quatrième ordre,* dont toutes les sections planes sont des courbes de la classe que nous venons d'étudier : cette surface est la réciproque de la surface des centres de courbure d'un ellipsoïde, ou plutôt la transformée homographique d'une telle réciproque.

On sait que la surface des centres de courbure, quand on la rapporte aux axes de l'ellipsoïde, a pour équation tangentielle

$$(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^2 = \left(\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2}\right)(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 + c^2\zeta^2 - 1).$$

En remplaçant ξ, η, ζ par $\lambda\xi$, $\mu\eta$, $\nu\zeta$, on peut choisir les constantes λ, μ, ν, de manière à ramener cette équation à la forme connue

$$(a^2 - b^2)(\xi^2\eta^2 + \zeta^2) + (b^2 - c^2)(\eta^2\zeta^2 + \xi^2) \\ + (c^2 - a^2)(\xi^2\zeta^2 - \eta^2) = 0.$$

La surface du quatrième ordre que nous avons en vue a pour équation, le tétraèdre de référence, $xyzt$, étant quelconque.

$$\alpha(x^2y^2 + z^2t^2) + \beta(y^2z^2 + x^2t^2) + \gamma(x^2z^2 + y^2t^2) = 0,$$

avec

$$\alpha + \beta + \gamma = 0.$$

Nous reviendrons ailleurs sur cette surface, déjà signalée par M. Cayley, qui admet les douze points doubles $(0,0,0,1)$, $(0,0,1,0)$, $(0,1,0,0)$, $(1,0,0,0)$, $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$, et les seize droites

$$x = \pm y = \pm z, \qquad y = \pm z = \pm t,$$
$$z = \pm t = \pm x, \qquad t = \pm x = \pm y,$$

sur chacune desquelles sont situés trois points singuliers.

Nous nous bornerons ici à démontrer la propriété que nous avons énoncée tout à l'heure.

15. Écrivons l'équation de la surface sous la forme

$$\sin^2\varphi(x^2y^2 + z^2t^2) + \cos^2\varphi(x^2z^2 + y^2t^2) = (x^2t^2 + y^2z^2).$$

On peut la mettre encore sous une des trois formes équivalentes

$$\sin^2\varphi(xy - zt)^2 + \cos^2\varphi(xz + yt)^2 = (xt + yz)^2,$$
$$\sin^2\varphi(xy - zt)^2 + \cos^2\varphi(xz - yt)^2 = (xt - yz)^2,$$

$$(x^2 - t^2)^2 \sin^2\varphi \cos^2\varphi \\ = (x^2\cos^2\varphi + t^2\sin^2\varphi - y^2)(x^2\sin^2\varphi + t^2\cos^2\varphi - z^2).$$

Chacun de ces types présentant l'équation sous la forme $ST = R^2$

met en évidence une série de quadriques inscrites dans la surface $\lambda^2 S + 2\lambda R + T = 0$, λ étant un paramètre variable. On trouve ainsi, conformément à la théorie générale donnée par Kummer pour les surfaces du quatrième ordre à douze points doubles, les trois systèmes de quadriques inscrites

$$xt + yz + \sin\omega \sin\varphi(xy + zt) + \cos\omega \cos\varphi(yt + xz) = 0,$$
$$xt - yz + \sin\rho \sin\varphi(xy - zt) + \cos\rho \cos\varphi(yt - xz) = 0,$$
$$x^2 \sin^2(\sigma + \varphi) + t^2 \cos^2(\sigma + \varphi) - y^2 \sin^2\sigma - z^2 \cos^2\sigma = 0,$$

ω, ρ, σ désignant des paramètres arbitraires.

Il est aisé de trouver maintenant les équations des congruences formées par les génératrices de ces quadriques.

On peut écrire les quadriques du premier système

$$(x + z\sin\omega \sin\varphi + y\cos\omega \cos\varphi)(t + y\sin\omega \sin\varphi + z\cos\omega \cos\varphi)$$
$$= (y\cos\omega \cos\varphi - z\sin\omega \sin\varphi)(y\sin\omega \cos\varphi - z\cos\omega \sin\varphi),$$

ce qui donne pour les deux systèmes de génératrices, θ et θ' étant des paramètres variables, les équations

$$(A) \quad \begin{cases} x\sin(\theta + \varphi) + y\cos\omega \sin\theta + z\sin\omega \cos\theta = 0, \\ t\cos(\theta + \varphi) - y\sin\omega \sin\theta + z\cos\omega \cos\theta = 0; \end{cases}$$

$$(B) \quad \begin{cases} x\sin(\theta' + \omega) + y\cos\varphi \sin\theta' + z\sin\varphi \cos\theta' = 0, \\ t\cos(\theta' + \omega) - y\sin\varphi \sin\theta' + z\cos\varphi \cos\theta' = 0, \end{cases}$$

De même on aurait, pour les génératrices des quadriques du second système les deux congruences

$$(C) \quad \begin{cases} x\sin(\theta_1 + \varphi) + y\cos\rho \sin\theta_1 - z\sin\rho \cos\theta_1 = 0, \\ t\cos(\theta_1 + \varphi) - y\sin\rho \sin\theta_1 - z\cos\rho \cos\theta_1 = 0; \end{cases}$$

$$(D) \quad \begin{cases} x\sin(\theta'_1 + \rho) + y\cos\varphi \sin\theta'_1 - z\sin\varphi \cos\theta'_1 = 0, \\ t\cos(\theta'_1 + \rho) - y\sin\varphi \sin\theta'_1 - z\cos\varphi \cos\theta'_1 = 0; \end{cases}$$

et pour les génératrices des quadriques du troisième système

$$(E)\qquad \begin{cases} x\sin(\sigma+\varphi)+y\sin\sigma\cos\theta_2-z\cos\sigma\sin\theta_2=0,\\ t\cos(\sigma+\varphi)-y\sin\sigma\sin\theta_2-z\cos\sigma\cos\theta_2=0;\end{cases}$$

$$(F)\qquad \begin{cases} x\sin(\sigma+\varphi)+y\sin\sigma\cos\theta'_2+z\cos\sigma\sin\theta'_2=0,\\ t\cos(\sigma+\varphi)-y\sin\sigma\sin\theta'_2+z\cos\sigma\cos\theta'_2=0.\end{cases}$$

Les congruences (A) et (F) sont identiques; il suffit de remplacer dans (F) les paramètres variables σ et θ'_2 par θ et ω pour rendre les équations de (F) identiques à celles de (A).

De même les congruences (C) et (E); (B) et (D) sont identiques. Ces résultats sont conformes à la théorie de Kummer.

16. Cela posé, observons que si l'on coupe la surface par un plan P quelconque, on obtient une quartique Q, et que les trois systèmes (S) de coniques, communes à P et aux trois systèmes de quadriques inscrites, sont inscrites à la courbe Q.

Il est clair que dans un système de quadriques $\lambda^2 S+2\lambda R+T=0$, six surfaces sont tangentes à un plan quelconque; il y a donc dix-huit quadriques inscrites à la surface et tangentes au plan P.

Les trente-six droites suivant lesquelles P coupe ces quadriques se réduisent, d'après ce qui a été démontré sur les congruences des génératrices, à dix-huit droites, dont chacune est une tangente double de Q et appartient à deux systèmes de quadriques. Il en résulte que les trois systèmes (S) de coniques inscrites à Q ont deux à deux six bitangentes communes, et par suite les dix-huit droites se répartissent en six triangles, jouissant des propriétés générales rappelées au n° **2**. Pour démontrer que la quartique Q est une de nos courbes spéciales, il suffit (**6**) d'établir que les trois systèmes (S) de coniques inscrites ont une même cayleyenne. Or nous savons que la cayleyenne d'un système touche les douze bitangentes de ce système; si les trois cayleyennes coïncident, les dix-huit bitangentes toucheront une même courbe de troisième classe, et réciproquement. On peut démontrer que les trois congruences (A), (B), (C) font partie d'un même complexe, que l'on obtient en supposant φ variable dans (A); les droites de ce complexe

sont représentées par les équations

$$\begin{cases} x\sin(\theta+\varphi)+y\cos\omega\sin\theta+z\sin\omega\cos\theta=0, \\ t\cos(\theta+\varphi)-y\sin\omega\sin\theta+z\cos\omega\cos\theta=0, \end{cases}$$

où θ, φ, ω sont des paramètres variables. Remplaçant $\theta+\varphi$ par ψ, on a le complexe

$$\begin{cases} x\sin\psi+y\cos\omega\sin\theta+z\sin\omega\cos\theta=0, \\ t\cos\psi-y\sin\omega\sin\theta+z\cos\omega\cos\theta=0, \end{cases}$$

et l'on voit de suite que les congruences (B) et (C) en font partie. En introduisant les coordonnées de droites p, q, r, p', q', r', on a pour l'équation du complexe

$$p(rq'+r'q)+p'(rq+r'q')=0.$$

Le complexe est donc de troisième ordre, et par suite, dans le plan P, la courbe du complexe est de troisième classe. Cette courbe touche, d'après ce qui précède, les droites des congruences (A), (B), (C), situées dans le plan, c'est-à-dire les dix-huit tangentes doubles considérées plus haut. Ces dix-huit droites touchant ainsi une même courbe de troisième classe, le théorème est démontré. Par conséquent :

La surface réciproque du lieu des centres de courbure d'une quadrique, ainsi que toute surface homographique, est coupée par un plan quelconque suivant une courbe du quatrième ordre appartenant à la classe remarquable étudiée dans ce Mémoire.

Dans un prochain travail nous ferons application de ces résultats à la théorie des normales aux quadriques.

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME VI.

Pages.

Sur quelques formes quadratiques quaternaires; par le P. *Pepin* S. J.... 5

Remarques sur la théorie générale de la figure des planètes; par M. *Hamy*. 69

Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives; par M. *Émile Picard*..... 145

Sur les formes différentielles associées; par M. *G. Halphen*..... 211

Rectification au sujet du Mémoire sur les équations aux dérivées partielles; par M. *Émile Picard*..... 231

Sur le théorème d'Abel et quelques-unes de ses applications à la Géométrie (suite); par M. *Georges Humbert*..... 233

Sur les intégrales pseudo-elliptiques d'Abel; par M. *J. Dolbnia*..... 293

Sur une classe nouvelle de transcendantes uniformes; par M. *H. Poincaré*. 313

Sur les relations qui lient les éléments d'un système orthogonal aux fonctions thêta et sigma d'un seul argument et aux fonctions elliptiques, et sur une théorie élémentaire de ces transcendantes, déduite desdites relations; par M. *Ferdinand Caspary*..... 367

Remarques sur quelques équations différentielles partielles d'ordre supérieur; par M. *August Gutzmer*..... 405

Sur une classe de courbes planes, et sur une surface remarquable du quatrième ordre; par M. *Georges Humbert*..... 423

FIN DU TOME VI DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

15597 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.4
t.6
Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY